ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ

ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АКАДЕМИИ НАУК СССР том 70

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА

Том 70

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

1973

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

1973 ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА Том 70

Л. А. ШЕЛЕПИН

ИСЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА И ЕГО ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

Введение

Настоящая работа посвящена теории коэффициентов Клебша — Гордана и ее физическим приложениям. Данная теория возникла в начале XX в. как один из частных аспектов теории групп. Коэффициенты Клебша — Гордана тесно связаны со структурой групп. Это обусловило их большое прикладное значение. Теория коэффициентов Клебша — Гордана группы SU_2 (теория угловых моментов) имеет определяющее значение в любых конкретных расчетах в атомной или ядерной физике. Только на ее основе оказались возможными расчеты сечений, уровней энергии, волновых функций, вероятностей переходов. Поэтому теория угловых моментов развивалась прежде всего как физическая теория, которая давала возможность проводить конкретные расчеты. До 60-х годов потребности физики в расчетном групповом аппарате в общем удовлетворялись. Однако в эти годы происходит резкое расширение объектов группового исследования. В частности, в теории элементарных частиц после открытия SU_3- и SU_6-симметрий возникла потребность в расчетном аппарате групп SU_n, а затем O_n, $\mathrm{Sp}\,(2n)$, некомпактных групп и т. д. Такого расчетного аппарата ранее не было. Кроме того, наличие определенной иерархии симметрий в сложных физических системах (атомах, ядрах, адронах, молекулах) потребовало анализа взаимосвязи симметрий, нахождения скрытых симметрий, выяснения их природы.

В это же время были открыты новые свойства, в том числе новые симметрии коэффициентов Клебша — Гордана группы SU_2, что вызвало необходимость перестройки и обобщения теории угловых моментов, казавшейся до этого детально разработанной и ясной. Важнейшей задачей является также адекватное исследование физических систем методами коэффициентов Клебша — Гордана. Работа посвящена в основном трем аспектам теории коэффициентов Клебша — Гордана: разработке обобщенной теории угловых моментов, созданию расчетного аппарата высших групп и новым физическим приложениям.

Однако в настоящее время вряд ли правильно говорить о теории коэффициентов Клебша — Гордана как о некоторой узкой, хотя и чрезвычайно важной области. То, что мы называем коэффициентами Клебша — Гордана,— фактически новое исчисление, завоевывающее себе все новые и новые позиции, тесно связанное с алгеброй, многомерной геометрией, топологией, проективной геометрией, теорией аналитических функций, специальными функциями, дифференциальными уравнениями, комбинаторным анализом, конечными разностями. Это исчисление посте-

[1] Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, защищена 30 марта 1970 г.

пенно принимает всеобщий универсальный характер. Наряду с конкретными соотношениями и приложениями выяснение универсальной роли коэффициентов Клебша — Гордана составляет одну из существенных сторон работы.

Настоящая работа состоит из введения и шести глав. Во введении наряду с кратким обзором сообщаются необходимые сведения по классической теории угловых моментов. Первые две главы посвящены построению фундамента общей теории коэффициентов Клебша — Гордана — обобщенной теории угловых моментов. В частности, вводятся высшие симметрии и устанавливается взаимосвязь с топологическими методами.

В третьей и четвертой главах дано развитие расчетного аппарата высших групп, в особенности групп SU_n. В них рассмотрены вопросы взаимосвязи различных групп Ли между собой, а также с группой перестановок.

В пятой и шестой главах рассмотрены прикладные вопросы теории угловых моментов. Разрабатываются расчетный групповой аппарат теории инвариантных уравнений и методика анализа сложных физических систем.

Содержание работы в значительной мере основано на материалах [1—20]. Для настоящего издания она подверглась сокращению. В частности, сокращен ряд мест, общих с работой Карасева [21], помещенной в этом же сборнике. Для справок в приложение добавлены таблицы редукции. В остальном изменения минимальны, поскольку существенный сдвиг за этот период произошел только в групповой теории когерентного спонтанного излучения, освещенной в статье [22] данного сборника.

§ 1. Коэффициенты Клебша—Гордана и их приложения

В настоящее время роль коэффициентов Клебша — Гордана (КГ) непрерывно возрастает, их взаимосвязи и приложения чрезвычайно многоплановы и затрагивают большинство областей физики и математики. Несмотря на это, факт чрезвычайной общности и фундаментальности коэффициентов КГ осознан не полностью и далеко не всеми. Исторически теория коэффициентов КГ возникла и развивалась на основе теории непрерывных групп, в частности, группы вращений. В то же время коэффициенты КГ имеют тесную связь с дискретной комбинаторной математикой. Интересно отметить, что один из создателей дифференциального и интегрального исчисления Лейбниц, придавая фундаментальное значение комбинаторным методам, предполагал существование некоторого универсального исчисления. На наш взгляд, основы такого исчисления и закладываются в современной теории коэффициентов КГ. Поэтому, помимо конкретного развития теории коэффициентов КГ и ее физических приложений, одной из задач настоящей работы является выяснение универсальной роли теории, общности ее методов, богатства взаимосвязей.

Ниже очень кратко рассмотрены основные вехи развития теории коэффициентов КГ и ее приложений. Коэффициенты КГ возникли из теории инвариантов и развивались на основе групп Ли. В их теорию внесли существенный вклад Клебш, Гордан, Аронгольд, Сильвестр, Фробениус, Гильберт, Бернсайд, Шур, Картан. Общее направление приложений теории групп во многом предопределила «Эрлангенская программа» Клейна. Большую роль в развитии теории инвариантов и представлений групп, а также в ее применениях в физике сыграли в 20-е годы работы Вейля и, в частности, работа [23].

Использование групповых методов в физике началось с теории характеров. Простой аппарат этой теории позволил решить ряд вопросов спект-

роскопии (классификация уровней, правила отбора, расщепление термов). Однако для решения задач, связанных с вычислением сечений, конкретным положением уровней, расчетом сложных физических систем, теории характеров уже недостаточно. Для этого необходима теория коэффициентов КГ, которая в отличие от теории характеров позволяет полностью использовать информацию, заключающуюся в факте физической симметрии. Матрицы представлений групп (матрицы «конечных вращений») могут быть выражены через коэффициенты КГ.

Развитие применений теории коэффициентов КГ в физике можно разделить на три основных этапа. Первый этап охватывает 30-е годы. Большую роль в это время сыграли работы Вейля [24], Картана [25], Ван-дер-Вардена [26], Вигнера [27], впервые получившего формулу численного значения для коэффициента КГ группы вращений. Результаты Вигнера явились основанием для создания расчетных формул группы вращений, получивших в физике название — «теория угловых моментов». Теория угловых моментов нашла широкое применение в теории атомных спектров [28]. Появилась возможность вычислить некоторые сечения, положения уровней, проводить расчеты волновых функций. Однако эти расчеты в тот период были чрезвычайно громоздки и требовали большого времени.

Второй этап (40—50-е годы) связан с появлением работ Рака [29], благодаря которым многие расчеты, требовавшие раньше большого труда и изобретательности, стали выполняться согласно простым экономным схемам. Методика Рака, включавшая в себя операции с коэффициентами Рака и генеалогическими коэффициентами, явилась крупным шагом в конкретном изучении атомных спектров (см., например, [30]). Она широко использовалась в теории ядра, а также и в теории молекул. Методы Рака были усовершенствованы в 50-е годы; изучались свойства соединений коэффициентов КГ, j-символов, трансформационных матриц, были разработаны соответствующие графические методы. Почти все результаты относились к группе вращений (SU_2). Теория, сформировавшаяся к концу 50-х годов, отличалась стройностью и замкнутостью. Она изложена в ряде монографий [31—35]. По отношению к этой теории представляется уместным термин «классическая теория угловых моментов». Следует, однако, отметить, что уже в этот период в связи с нуждами атомной и ядерной спектроскопии появляется потребность в коэффициентах КГ высших групп (одним из аспектов этого вопроса явились генеалогические коэффициенты). Большое влияние на работы в данном направлении оказали лекции Рака [36].

Современный третий этап развития теории коэффициентов КГ по времени относится к 60-м годам. Остановимся на нем несколько подробнее. Начало этого этапа можно связать с работой Редже [37], в которой были открыты новые правила симметрии коэффициентов КГ, не укладывающиеся в рамки классической теории угловых моментов. Эта работа, выполненная в 1958 г., носила неожиданный и интригующий характер, поскольку она затрагивала самый фундамент теории угловых моментов. Однако значение открытия Редже было в первое время недооценено. Лишь через несколько лет становится ясным, что классическая теория угловых моментов должна быть перестроена и создана обобщенная теория угловых моментов [1]. Создание такой теории является одним из трех основных направлений работ по теории коэффициентов КГ на современном этапе. Однако в этом направлении за последние годы появилось не так много работ. Следует отметить работы [38—39], где были получены новые функциональные соотношения симметрии коэффициентов Рака; работы [40—41], где было показано, что использование симметрии Редже дает определенные преимущества при расчетах на ЭВМ; работу [42], где симметрия Редже рассматривалась на основе теории целых аналитических функций; работу [43], где исследовался физический смысл симметрии Редже и высших сим-

метрий, введенных Л. А. Шелепиным в работе [2] на основе перехода к классическому пределу. Вопросы перехода к классическому пределу обсуждались в работах [44—45]. В [45] рассматривались также связи симметрии Редже и высших симметрий с магическими квадратами и проективной геометрией. В работах [46—48] симметрия Редже обсуждалась на основе квазибиномиального представления коэффициентов КГ. Однако, несмотря на важность полученных результатов, не было построено последовательной обобщенной теории угловых моментов.

Второе направление — построение теории коэффициентов КГ высших групп — вызвано развитием применений групповых методов в теории ядра, атома, а особенно в связи с открытием SU_3- и SU_6-симметрий элементарных частиц. Для построения коэффициентов КГ высших групп существовала основа в виде детально развитой теории групп (алгебр) Ли. (Здесь следует отметить фундаментальные работы и монографии [36, 49—51].) Однако имелся разрыв между математикой и требованиями физики, фактически расчетный аппарат, пригодный для физических приложений, почти полностью отсутствовал. В работе [52] на основе алгебр Ли в связи с анализом различных схем высших симметрий сильных взаимодействий были рассмотрены пути построения соответствующего аппарата коэффициентов КГ. Де Сварт [53] дал конкретную схему расчетов октетной модели адронов и вычислил ряд частных изоскалярных факторов. В цикле работ Биденхарна и Бэрда [54, 55] рассматривались вопросы конструкции представлений полупростых групп Ли; в частности, для групп SU_n были построены операторы Казимира. В работах Мошинского [56], Мукунды и Пандита [57] были рассмотрены в общем виде вопросы построения коэффициентов КГ группы SU_3 (конструкции тензоров, полиномиальный базис).

Наиболее интересными представляются результаты работ Понзано [58] и Шарпа и фон Байера [59]. В [58] вычислены нормированные коэффициенты КГ группы SU_3 и рассматривается их связь с трансформационными матрицами группы SU_2. В [59] дан метод построения нормированных изоскалярных факторов группы SU_3 и вычислен ряд частных изофакторов. В ряде работ составляются таблицы простейших изофакторов групп SU_n, встречающихся в приложениях, в частности, таблицы изофакторов группы SU_3 [60] и группы SU_6 [61]. Из работ последнего времени следует отметить [62—70], где был получен ряд интересных результатов. Однако практически удобного единого аппарата, пригодного для широкого класса групп, создано не было.

Третьим направлением работ современного этапа является рассмотрение физических симметрий. Характерным здесь является резкое расширение областей применения коэффициентов КГ. Наряду с классическими областями применения групповых методов — атомом и ядром особое внимание в этот период было обращено на элементарные частицы. Для объяснения свойств сильновзаимодействующих частиц Гелл-Манн [71] и Нееман [72] предложили модель SU_3-симметрии. После открытия Ω^--гиперона [73], предсказанного на основе этой модели, возникает целый поток работ по симметрии элементарных частиц (см. обзоры [74—77]). Важными результатами явились массовые формулы, соотношения между константами связи и, наконец, открытие SU_6-симметрии [78—81]. Одновременно происходило накопление экспериментальных данных. Сейчас наряду с атомной, ядерной и молекулярной спектроскопией можно говорить о спектроскопии элементарных частиц [82].

Общепризнанной становится идея сложности структуры адронов. Наибольшее внимание привлекла здесь модель кварков, объяснившая ряд экспериментальных закономерностей [83, 84]. Следует отметить также успешное применение симметрий $O(4,1)$ и $O(4,2)$ к атому водорода [85—86]

и попытки приложения на этой основе некомпактных групп к теории элементарных частиц [87—89]. Однако наряду с достижениями стали намечаться и определенные трудности. Все попытки экспериментального обнаружения кварков к успеху не привели. Создалась весьма сложная и запутанная картина симметрий элементарных частиц. Многочисленные работы по классификации адронов, динамическому обоснованию симметрий после первых успехов не дали сколько-нибудь существенных результатов.

Одна из основных причин связана с отсутствием (а в некоторых случаях недостаточным использованием) адекватного математического аппарата. Таким аппаратом является теория коэффициентов КГ, позволяющая находить скрытые симметрии, анализировать взаимосвязь симметрий, восстанавливать структуру системы. Возможности этой теории отнюдь не до конца использованы и в теории атомов, и в теории ядер. Особенно перспективной представляется молекулярная спектроскопия, где имеются определенные указания [90—94] на возможность резкого расширения использования групповых методов. Очень важной в прикладном отношении является также теория инвариантных уравнений, тесно связанная с теорией коэффициентов КГ. На ее основе имеются возможности формализации и упрощения расчетов различных эффектов. В настоящее время начинает проявляться универсальный характер коэффициентов КГ. Коэффициенты КГ высших групп оказались теснейшим образом связанными с обобщенной теорией угловых моментов. Выявились единая основа, единое здание теории коэффициентов КГ компактных групп Ли. Отмеченные во введении взаимосвязи коэффициентов КГ в различных областях математики придали им новый смысл. Сейчас уже можно говорить об исчислении коэффициентов КГ.

Общему изложению новых результатов во введении предпослано краткое изложение классической теории угловых моментов, носящее в основном обзорный характер.

§ 2. Классическая теория угловых моментов

Теория угловых моментов достаточно полно изложена в ряде монографий [31—35]. Поэтому здесь будет приведена краткая сводка формул классической теории в форме, удобной для приложения.

Коэффициенты КГ, задающие преобразование от базиса $\psi^{j_1}_{m_1} \times \psi^{j_2}_{m_2}$ к базису ψ^{j}_{m}, будут обозначаться как $(j_1 j_2\, m_1 m_2 | jm)$, где j_1, j_2, j — моменты, m_1, m_2, m — их проекции. Преобразования КГ являются унитарными. Для них справедливы формулы:

$$\sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm)(j_1 j_2 m_1 m_2 | j'm') = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \tag{1}$$

$$\sum_{jm} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm)(j_1 j_2 m_1' m_2' | jm) = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}. \tag{2}$$

При наложении определенных фазовых условий [27—31] коэффициенты — действительны. Свойства симметрии коэффициента Вигнера ($3j$-символа), связанного с коэффициентом КГ соотношением

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2+m_3}(2j_3+1)^{-1/2}(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 - m_3), \tag{3}$$

задаются равенствами

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j_i & j_k & j_l \\ m_i & m_k & m_l \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\varepsilon = 1$, если перестановка столбцов четная, и равно $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$, если перестановка нечетная или знак проекций моментов меняется на обратный. Всего имеется 12 симметрий.

Большую роль в теории и приложениях играют различные соединения коэффициентов КГ, представляющие собой ковариантные суммы произведений, в частности обобщенные коэффициенты КГ, возникающие при сложении более чем двух моментов. Например,

$$(j_1j_2m_1m_2 \mid j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3 \mid j_{123}m_{123})(j_{123}j_4m_{123}m_4 \mid jm). \tag{5}$$

Особое значение имеют трансформационные матрицы (и их симметричные формы j-символы), задающие переход от одной схемы связи моментов к другой. Любые трансформационные матрицы могут быть выражены через сумму произведений простейших матриц — коэффициентов Рака. Связь между трансформационной матрицей, соответствующим ей коэффициентом Рака и $6j$-символом задается формулой

$$((j_1j_2)j_{12}j_3j \mid j_1(j_2j_3)j_{23}j) = \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}\,W(j_1j_2jj_3;\ j_{12}j_{23}) =$$
$$= \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}\,(-1)^{j_1+j_2+j_3+j}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \tag{6}$$

$6j$-Символ инвариантен к перестановке столбцов, а также одновременной перестановке двух любых пар моментов, находящихся в одном столбце. Всего имеется 24 правила симметрии. При сложении четырех моментов возникают $9j$-символы, связанные с соответствующей трансформационной матрицей соотношением

$$((j_1j_2)j_{12}(j_3j_4)j_{34}j \mid (j_1j_3)j_{13}(j_2j_4)j_{24}j) =$$
$$= \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{pmatrix} \tag{7}$$

и обладающие 72 правилами симметрии.

Для трансформационных матриц, возникающих при сложении большего числа моментов, теория усложняется. Для j-символов нет даже установившихся обозначений, не была решена задача перечисления j-символов высших порядков. Ниже приводится наиболее удобная, на наш взгляд, формулировка теории трансформационных матриц, рассмотренная в работе [3].

Трансформационная матрица определяется как матрица преобразования от одной схемы связи моментов к другой. Например,

$$\sum_{m_{12}m_{123}} (j_1j_2m_1m_2 \mid j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3 \mid j_{123}m_{123})(j_{123}j_4m_{123}m_4 \mid jm) =$$
$$= \sum_{j_{14}j_{23}} (((j_1j_2)j_{12}j)j_{123}j_4j \mid (j_1j_4)j_{14}(j_2j_3)j_{23}j) \times$$
$$\times \sum_{m_{14}m_{23}} (j_1j_4m_1m_4 \mid j_{14}m_{14})(j_2j_3m_2m_3 \mid j_{23}m_{23})(j_{14}j_{23}m_{14}m_{23} \mid jm), \tag{8}$$

$$\tau_{A(j_{12},\,j_{123});\,B(j_{14},\,j_{23})} = (((j_1j_2)j_{12}j_3)j_{123}j_4j \mid (j_1j_4)j_{14}(j_2j_3)j_{23}j). \tag{9}$$

Трансформационная матрица (9) задает преобразование между двумя схемами связи A и B с полным моментом j и значениями промежуточных моментов j_{12}, j_{123} и j_{14}, j_{23}. Умножая обе части равенства (8) на соответст-

вующие коэффициенты КГ и проводя необходимое суммирование, имеем

$$(((j_1j_2)j_{12}j_3)j_{123}j_4j\,|\,(j_1j_4)j_{14}(j_2j_3)j_{23}j) =$$
$$= \frac{1}{2j+1}\sum(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3\,|\,j_{123}m_{123})(j_{123}j_4m_{123}m_4\,|\,jm)\times$$
$$\times(j_1j_4m_1m_4\,|\,j_{14}m_{14})(j_2j_3m_2m_3\,|\,j_{23}m_{23})(j_{14}j_{23}m_{14}m_{23}\,|\,jm). \qquad (10)$$

Суммирование проводится здесь по всем проекциям моментов. Формулами типа (10) дается общее выражение для трансформационных матриц. В общем случае соответствующая матрица равна сумме произведений соответствующих коэффициентов КГ с множителем $(2j+1)^{-1}$. Будем, как обычно, называть совокупность трех связанных моментов триадой, а сами моменты, в зависимости от занимаемого ими места, слагаемыми и суммарными. В трансформационных матрицах триады связаны по принципу смежности.

Наряду с формулами типа (8), где число коэффициентов КГ в правой и левой частях равенства одинаково, и формулой типа (9), где все коэффициенты находятся в правой части, может быть записан ряд промежуточных формул. При этом коэффициенты КГ суммируются по всем m, встречающимся дважды в одной части равенства. Например,

$$\sum_{m_{12}m_{123}m_1m_3}(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3\,|\,j_{123}m_{123})\times$$
$$\times(j_{123}j_4m_{123}m_4\,|\,jm)(j_2j_3m_2m_3\,|\,j_{23}m_{23}) =$$
$$= \sum_{j_{14}m_{14}}(((j_1j_2)j_{12}j_3)j_{123}j_4j\,|\,(j_1j_4)j_{14}(j_2j_3)j_{23}j)\times$$
$$\times(j_1j_4m_1m_4\,|\,j_{14}m_{14})(j_{14}j_{23}m_{14}m_{23}\,|\,jm). \qquad (11)$$

Подчеркнем необходимость совпадения порядка моментов в коэффициентах КГ и триадах трансформационных матриц.

Все свойства трансформационных матриц следуют из выражений типа (10) и свойств коэффициентов КГ. Кратко остановимся на основных свойствах, полезных для приложений.

1. *Свойства унитарности*:

$$\tau_{A;\,B} = \tau_{B;\,A}, \qquad (12)$$

$$\sum_{j_{b_1}j_{b_2}\ldots}\tau_{A(j_{a_1}j_{a_2}\ldots);\,B(j_{b_1}j_{b_2}\ldots)}\,\tau_{B(j_{b_1}j_{b_2}\ldots);\,C(j_{c_1}j_{c_2}\ldots)} = \tau_{A(j_{a_1}j_{a_2}\ldots);\,C(j_{c_1}j_{c_2}\ldots)}. \qquad (13)$$

В частном случае, когда схемы связи A и C одинаковы,

$$\sum_{j_{b_1}j_{b_2}\ldots}\tau_{A(j_{a_1}j_{a_2}\ldots);\,B(j_{b_1}j_{b_2}\ldots)}\,\tau_{B(j_{b_1}j_{b_2}\ldots);\,A(j_{a_1'}j_{a_2'}\ldots)} = \delta_{j_{a_1}j_{a_1'}}\delta_{j_{a_2}j_{a_2'}}. \qquad (14)$$

2. *Свойства симметрии трансформационных матриц* определяются симметрией коэффициентов КГ и их перестановками в формуле типа (10). Как видно из определения, место, занимаемое конкретным моментом в матрице, произвольно с точностью до множителя; сохраняется лишь сцепление триад. Общая формула симметрии по отношению к перестановкам моментов имеет вид

$$\tau' = \varphi\sqrt{\frac{\prod_s(2j_s+1)}{\prod_{s'}(2j_{s'}+1)}}\,\tau. \qquad (15)$$

Произведение в числителе берется по всем промежуточным моментам j_s матрицы τ, тогда как в знаменателе — по соответствующим моментам

матрицы τ'. Фазовый множитель φ определяется равенством

$$\varphi = \prod_i (-1)^{a_i+b_i+c_i} (-1)^{\sum_k x_k}. \tag{16}$$

Произведение П берется по всем триадам. Для фиксированной триады $(j_1\, j_2)\, j_3$ $a_i = j_1 - j_2 + j_3$, если триада находится в левой части матрицы τ, $a_i = -j_1 + j_2 + j_3$, если триада находится в правой части матрицы τ. То же относится и к b_i, но при этом рассматривается матрица τ'. Если

Рис. 1. Обобщенные коэффициенты КГ

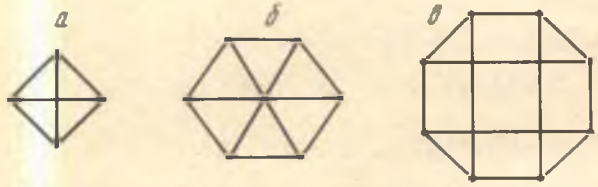


Рис. 2. Трансформационные матрицы

перестановка моментов в триаде $(j_1\, j_2)\, j_3$ четна при переходе от τ к τ', то $c_i = 0$, если нечетна, то $c_i = j_1 + j_2 + j_3$. Суммирование в фазовом множителе проводится по моментам, которые из слагаемых стали суммарными и из суммарных — слагаемыми при переходе от τ к τ' и находятся в одной части обеих матриц, и по тем моментам, которые находятся в разных частях τ и τ', но остались в прежнем качестве. Все симметрии, известные до работ Редже [37, 38], содержатся в формуле (15).

3. *Свойства диагональности.* Например, диагональность относительно промежуточных моментов, различающихся способом сложения одних и тех же моментов в правой и левой частях трансформационной матрицы:

$$(((j_1j_2)\, j_{12}j_3)\, j_{123}j_4j \,|\, (j_1\,(j_2j_3)\, j_{23})\, j'_{123}j_4j) = ((j_1j_2)\, j_{12}j_3j_{123} \,|\, (j_1\,(j_2j_3)\, j_{23})\, j_{123})\, \delta_{j_{123}j'_{123}}. \tag{17}$$

Когда схема одинакова и преобразование отсутствует, трансформационная матрица вырождается в произведение символов Кронекера

$$(((j_1j_2)\, j_{12}j_3)\, j_{123}j_4j \,|\, ((j_1j_2) \,|\, j'_{12}j_3)\, j'_{123}j_4j) = \delta_{j_{12}j'_{12}}\, \delta_{j_{123}j'_{123}}. \tag{18}$$

4. *Факторизация* (или представление трансформационных матриц в виде сомножителей). В частности, любая трансформационная матрица может быть представлена как сумма произведений коэффициентов Рака, которая иногда вырождается, как, например,

$$(((j_1j_2)\, j_{12}j_3)\, j_{123}j_4j \,|\, j_1\,((j_2j_3)\, j_{23}j_4)\, j_{234}j) =$$
$$= ((j_1j_2)\, j_{12}j_3j_{123} \,|\, j_1\,(j_2j_3)\, j_{23}j_{123})\,((j_1j_{23})\, j_{123}j_4j \,|\, j_1\,(j_{23}j_4)\, j_{234}j). \tag{19}$$

Формула типа (19), если ее читать справа налево, может рассматриваться как умножение двух матриц, имеющих одну общую триаду.

Общее правило умножения трансформационных матриц может быть сформулировано так: *общие триады должны иметь одинаковый порядок*; *по промежуточным моментам проводится суммирование*; *оставшиеся триады группируются в новую трансформационную матрицу*.

Этим методом могут быть получены все известные соотношения между трансформационными матрицами. Соотношения «частичной ортогональности» являются частным случаем этого правила.

5. *Рекуррентные свойства*. Все рекуррентные свойства могут быть получены из формул типа (9) и соответствующих свойств коэффициентов КГ. Перечисленные правила и соотношения составляют в основном все необходимое для практических приложений.

Нужно отметить как составную часть классической теории угловых моментов графический метод анализа соединений коэффициентов КГ, разработанный Юцисом, Левинсоном и Ванагасом [34]. Этот метод обладает большой наглядностью. Коэффициент КГ изображается ориентированным узлом (рис. 1, *а*). Суммирование по какой-либо проекции обозначается соединением свободных концов (рис. 1, *б* и *в*). Согласно этому принципу коэффициенту Рака ($6j$-символу) соответствует рис. 2, *а*, $9j$-символу — рис. 2, *б*, $12j$-символу второго рода — рис. 2, *в*. Любые соединения коэффициентов КГ, известные в 50-е годы, могли быть представлены графически.

Классическая теория угловых моментов являлась стройной и последовательной теорией, нашедшей чрезвычайно широкое применение в физике. Однако в конце 50-х годов стали ощущаться неполнота и недостаточность этой теории. Существенную роль в этом сыграло открытие Редже [37].

ГЛАВА I

СИММЕТРИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА

В первых двух главах проводится построение обобщенной теории угловых моментов. В данной главе рассматриваются обобщения, связанные с новыми свойствами симметрии коэффициентов КГ (симметрия Редже и введенные ниже высшие симметрии). Исследуются новые способы связи и новые соединения коэффициентов КГ и $n \times n$-символов.

§ 1. Симметрия Редже и ее следствия

В 1958 г. Редже открыл новые свойства симметрии коэффициентов КГ, не содержащиеся в классической теории угловых моментов. Редже показал, что $3jm$-символ Вигнера может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} -j_1+j_2+j_3 & j_1-j_2+j_3 & j_1+j_2-j_3 \\ j_1-m_1 & j_2-m_2 & j_3-m_3 \\ j_1+m_1 & j_2+m_2 & j_3+m_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} = \| R_{ik} \|, \qquad (1.1)$$

где 3×3 — квадратный символ $\| R_{ik} \|$ является коэффициентом в разложении J степени детерминанта [1]

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}^J = \sqrt{(J!)^3 (J+1)} \sum_{\sum_k R_{ik} = J} \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \frac{u_1^{R_{11}} u_2^{R_{12}} u_3^{R_{13}} v_1^{R_{21}} v_2^{R_{22}} v_3^{R_{23}} w_1^{R_{31}} w_2^{R_{32}} w_3^{R_{33}}}{(R_{11}!\, R_{12}!\, R_{13}!\, R_{21}!\, R_{22}!\, R_{23}!\, R_{31}!\, R_{32}!\, R_{33}!)^{1/2}}. \qquad (1.2)$$

В соответствии с симметрией детерминанта Δ символ $\| R_{ik} \|$ инвариантен к транспонированию и четной перестановке строк и столбцов и умножается на $(-1)^J$ при нечетной перестановке. Всего насчитывается $3! \times \times 3! \times 2 = 72$ правила симметрии. Как будет показано в этом параграфе, следствия симметрии Редже приводят к появлению целой совокупности новых формул и соотношений, не содержащихся в классической теории угловых моментов, а также к существенной перестройке этой теории [1—4].

Подставив в выражение $6j$-символа

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \sum \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j \\ m_{12} & m_3 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ -m_3 & -m_2 & m_{23} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j & j_{23} \\ -m_1 & m & -m_{23} \end{pmatrix} (-1)^\alpha, \quad \alpha = j_1 + j_2 + j_{12} + j_3 + j_{23} + j +$$

$$+ m + m_{23} + m_3 \qquad (1.3)$$

вместо $3jm$-символов выражение (1.1), можно представить $6j$-символ в виде [2]

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} & R_{41} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} & R_{42} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & R_{43} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} j + j_3 - j_{12} & j_1 + j - j_{23} & j_2 + j_3 - j_{23} & j_1 + j_2 - j_{12} \\ j_3 + j_{23} - j_2 & j_1 + j_{12} - j_2 & j_3 + j_{12} - j & j_1 + j_{23} - j \\ j + j_{23} - j_1 & j + j_{12} - j_3 & j_2 + j_{12} - j_1 & j_2 + j_{23} - j_3 \end{Vmatrix} \qquad (1.4)$$

В $6j$-символе, записанном в этой форме, все 12 элементов — целые неотрицательные числа. Разности между соответствующими элементами строк и столбцов оказываются постоянными, и (1.4) можно переписать так:

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{11} + \Delta_1 & R_{11} + \Delta_2 & R_{11} + \Delta_3 \\ R_{11} + \Delta' & R_{11} + \Delta_1 + \Delta' & R_{11} + \Delta_2 + \Delta' & R_{11} + \Delta_3 + \Delta' \\ R_{11} + \Delta'' & R_{11} + \Delta_1 + \Delta'' & R_{11} + \Delta_2 + \Delta'' & R_{11} + \Delta_3 + \Delta'' \end{Vmatrix} \qquad (1.5)$$

Связь моментов j и R_{ik} дается равенствами:

$$\begin{aligned} 2j &= R_{11} + R_{23} = R_{21} + R_{13} = 2R_{11} + \Delta_1 + \Delta'', \\ 2j_{12} &= R_{23} + R_{32} = R_{22} + R_{33} = 2R_{11} + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta' + \Delta'', \\ 2j_3 &= R_{11} + R_{32} = R_{31} + R_{12} = 2R_{11} + \Delta_2 + \Delta', \\ 2j_1 &= R_{21} + R_{42} = R_{22} + R_{41} = 2R_{11} + \Delta_1 + \Delta_3 + \Delta', \\ 2j_{23} &= R_{13} + R_{42} = R_{12} + R_{43} = 2R_{11} + \Delta_3 + \Delta' + \Delta'', \\ 2j_2 &= R_{31} + R_{43} = R_{33} + R_{41} = 2R_{11} + \Delta_2 + \Delta''. \end{aligned} \qquad (1.6)$$

[1] В соответствии с (1.1) в разложении (1.2) приведен нормировочный множитель $\sqrt{(J!)^3 (J+1)}$, отличающийся от введенного Редже в [37].
[2] Ср. [31, формула (56.19)].

Всего в (1.4) шесть независимых величин: произвольный элемент R_{11} и пять разностей $\Delta_i^{(k)}$. Коэффициент Рака, записанный в форме (1.4), инвариантен к произвольной перестановке строк и столбцов. Всего имеется $3! \times 4! = 144$ типа симметрии, которые являются прямым следствием симметрии (1.1) и формулы (1.3). В 1959 г. эти правила были найдены Редже [38] в виде соотношений между $6j$-символами, записанными в обычной форме.

В дальнейшем будем называть (1.1) и (1.4) R-символами ($9R$-символ и $12R$-символ). Все формулы теории угловых моментов будем записывать в виде соотношений между R-символами. Такой способ записи (редже-инвариантный) автоматически включает все следствия из новых правил симметрии.

Производя преобразования симметрии Редже и перейдя обратно к jm-представлению, получаем целый ряд новых соотношений между коэффициентами КГ, Рака и трансформационными матрицами. Одним из примеров новых формул являются соотношения ортогональности и рекуррентные для коэффициентов КГ и Рака. Формулы ортогональности коэффициентов КГ в R-символах имеют вид:

$$\sum_\alpha \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21}-\alpha & R_{22}+\alpha & R_{23} \\ R_{31}+\alpha & R_{32}-\alpha & R_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ R_{21}-\alpha & R_{22}+\alpha & R'_{23} \\ R_{31}+\alpha & R_{32}-\alpha & R'_{33} \end{Vmatrix} = \frac{1}{R_{11}+R_{12}+1}\,\delta_{R_{ik}R'_{ik}}, \tag{1.7}$$

$$\sum_\alpha \begin{Vmatrix} R_{11}+\alpha & R_{12}+\alpha & R_{13}-\alpha \\ R_{21} & R_{22} & R_{23}+\alpha \\ R_{31} & R_{32} & R_{33}+\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{11}+\alpha & R_{12}+\alpha & R_{13}+\alpha \\ R'_{21} & R'_{22} & R_{23}+\alpha \\ R'_{31} & R'_{32} & R_{33}+\alpha \end{Vmatrix} \times$$
$$\times (R_{11}+R_{12}+2\alpha+1) = \delta_{R_{ik}R'_{ik}}. \tag{1.8}$$

Отсюда следуют, в частности, новые соотношения ортогональности коэффициентов КГ:

$$\sum_\gamma (j_1+r+\gamma \;\; j_2+r-\gamma \;\; m_1+r+\gamma \;\; m_2+r-\gamma \,|\, j_3 \;\; m_3+2r) \times$$
$$\times (j_1+r'+\gamma \;\; j_2+r'-\gamma \;\; m_1+r'+\gamma \;\; m_2+r'-\gamma \,|\, j_3 \;\; m_3+2r') =$$
$$= \frac{2j_3+1}{j_1+j_2-m_1-m_2+1}\,\delta_{rr'}, \tag{1.9}$$

$$\sum_r (j_1+r+\gamma \;\; j_2+r-\gamma \;\; m_1+r+\gamma \;\; m_2+r-\gamma \,|\, j_3 \;\; m_3+2r) \times$$
$$\times (j_1+r+\gamma' \;\; j_2+r-\gamma' \;\; m_1+r+\gamma' \;\; m_2+r-\gamma' \,|\, j_3 \;\; m_3+2r) \times$$
$$\times \frac{j_1+j_2-m_1-m_2+4r+1}{2j_3+1} = \delta_{\gamma\gamma'}. \tag{1.10}$$

Первое и второе рекуррентные соотношения [31] в R-символах имеют вид

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23}+1 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33}-1 \end{Vmatrix} \sqrt{R_{23}(R_{33}+1)} + \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21}+1 & R_{22} & R_{23} \\ R_{31}-1 & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} \sqrt{R_{21}(R_{31}+1)} +$$
$$+ \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22}+1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32}-1 & R_{33} \end{Vmatrix} \sqrt{R_{22}(R_{32}+1)} = 0 \tag{1.11}$$

Третье рекуррентное соотношение [31] в R-символах

$$\left(\frac{J+1}{R_{11}}\right)^{1/2}\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} = (R_{22}!\,R_{33}!)^{1/2}\begin{Vmatrix} R_{11}-1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22}-1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33}-1 \end{Vmatrix} +$$
$$+(R_{32}!\,R_{23}!)^{1/2}\begin{Vmatrix} R_{11}-1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23}-1 \\ R_{31} & R_{32}-1 & R_{33} \end{Vmatrix} \qquad (1.12)$$

Примером одной из новых рекуррентных формул в jm-записи является

$$(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_3-m_3) = \sqrt{\frac{(2j_3+1)(j_1+m_1+1)(j_1-m_1)}{2(j_3+1)(j_3-m_3+1)(j_3+m_3)}}\times$$
$$\times(j_1-{}^1/_2\;\; j_2\;\; m_1-{}^1/_2\;\; m_2\,|\,j_3+{}^1/_2\;\; -m_3-{}^1/_2)+ \qquad (1.13)$$
$$+\sqrt{\frac{(2j_3+1)(j_2+m_2+1)(j_2-m_2)}{2(j_3+1)(j_3-m_3+1)(j_3+m_3)}}(j_1\,j_2-{}^1/_2\,m_1\,m_2-{}^1/_2\,|\,j_3+{}^1/_2\;\; -m_3-{}^1/_2).$$

Отметим также полезную частную формулу

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{Vmatrix} = (-1)^J\left[\frac{R_{11}!\,R_{12}!\,R_{13}!}{(2J+1)!}\right]^{1/2}\frac{J!}{(J-R_{21})!\,(J-R_{22})!\,(J-R_{23})!}, \qquad (1.14)$$

где J — четное число (при J нечетном $\|R_{ik}\| = 0$). Отсюда следует соотношение

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_1 & j \\ m_1 & m_1 & m \end{pmatrix} = \left[\frac{(2j_1-j)!\,(j-m)!\,(j+m)!}{(2J+1)!}\right]^{1/2}\frac{(-1)^J J!}{(2j_1)!\,(j_1+j+m_1)!\,(j_1+j-m_1)!}. \qquad (1.15)$$

Для коэффициента Рака в R-символах формула ортогональности имеет вид

$$\sum_\beta \begin{Vmatrix} R_{11}-\alpha & R_{21}-\beta & R_{31}-\beta & R_{41}-\alpha \\ R_{12}+\beta & R_{22}+\alpha & R_{32}+\alpha & R_{42}+\beta \\ R_{13}+\beta & R_{23}+\alpha & R_{33}+\alpha & R_{43}+\beta \end{Vmatrix}\times$$
$$\times\begin{Vmatrix} R_{11}-\alpha' & R_{21}-\beta & R_{31}-\beta & R_{41}-\alpha' \\ R_{12}+\beta & R_{22}+\alpha' & R_{32}+\alpha' & R_{42}+\beta \\ R_{13}+\beta & R_{23}+\alpha' & R_{33}+\alpha' & R_{43}+\beta \end{Vmatrix}\times$$
$$\times(R_{13}+R_{42}+2\beta+1)(R_{23}+R_{32}+2\alpha+1) = \delta_{\alpha\alpha'}. \qquad (1.16)$$

Отсюда может быть получена новая формула ортогональности

$$\sum_\alpha \begin{Vmatrix} j_1-\alpha+\beta' & j_2 & j_{12}+\alpha+\beta' \\ j_3-\beta'+\alpha & j & j_{23}+\alpha+\beta' \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} j_1-\alpha+\beta & j_2 & j_{12}+\alpha+\beta \\ j_3-\beta+\alpha & j & j_{23}+\alpha+\beta \end{Vmatrix}\times$$
$$\times(j_{12}+j_{23}+j_1-j_3+4\beta+1)(j_{12}+j_{23}+j_3-j_1+4\alpha+1) = \delta_{\beta\beta'}. \qquad (1.17)$$

Нетрудно записать рекуррентные соотношения и для коэффициента Рака в R-символах, которые дают новые рекуррентные соотношения в jm-записи.

Представляет интерес анализ формулы для коэффициента Рака

$$(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3\,|\,jm) =$$
$$= \sum_{j_{23}}((j_1j_2)\,j_{12}j_3j\,|\,j_1\,(j_2j_3)\,j_{23}j)(j_1j_{23}m_1m_{23}\,|\,jm)(j_2j_3m_2m_3\,|\,j_{23}m_{23}). \qquad (1.18)$$

В R-символах она имеет вид

$$(-1)^{A+\alpha}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A-\alpha \\ A_{31} & A_{32} & A+\alpha \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A+\alpha & B_{22} & B_{23} \\ A-\alpha & B_{32} & B_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$=(-1)^{B_{33}+B_{13}}\sum_C(-1)^{C+\beta}(2C+1)\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} D_{11} & A_{11} & B_{12} & C_{11} \\ C_{12} & B_{13} & A_{12} & D_{12} \\ B_{11} & C_{13} & D_{13} & A_{13} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ B_{22} & A_{22} & C-\beta \\ B_{32} & A_{32} & C+\beta \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ A_{21} & B_{23} & C+\beta \\ A_{31} & B_{33} & C-\beta \end{Vmatrix} \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует ряд новых формул, например,

$$(-1)^{j_{12}+j_2-j_1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j \\ -m_{12}' & m_3 & m \end{pmatrix} =$$

$$=(-1)^{2j}\sum_C(-1)^{C+\beta}(2C+1)\begin{Bmatrix} {}^1/_2(j_1+j_2-m_{12}) & {}^1/_2(j_1+j_2+m_{12}) & j_{12} \\ j_3 & j & C \end{Bmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} j_3 & {}^1/_2(j_1+j_2+m_{12}) & C \\ m_3 & {}^1/_2(j_1-j_2-m_1+m_2) & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^1/_2(j_1+j_2-m_{12}) & j & C \\ {}^1/_2(j_1-j_2+m_1-m_2) & m & -\beta \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

где $m_{12}' = j_2 - j_1$. Коэффициент Рака здесь зависит уже не только от моментов, но и от их проекций. Можно указать три основные формы для коэффициента Рака (остальные являются их комбинациями):

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(j_2+j_{12}+m_2+m_{12}) & \frac{1}{2}(j_1+j_{12}+m_1+m_{12}) & \frac{1}{2}(j_1+j_2+m_1+m_2) \\ j_3 & j & C \end{Bmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(j_1+j_2-m_{12}) & \frac{1}{2}(j_1+j_2+m_{12}) & j_{12} \\ j_3 & j & C \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, в числе аргументов коэффициента Рака могут быть m. В этом смысле нет принципиальной разницы между коэффициентом КГ и Рака, точнее, между jm- и j-символами.

В рассматриваемой трактовке все они попадают в категорию R-символов. Трансформационные матрицы как соединения коэффициентов Рака также могут быть записаны в виде R-символов. Поскольку редже-инвариантные соотношения включают в себя целый ряд формул в jm-записи, то могут рассматриваться и трансформационные матрицы (j-символы), зависящие от проекций m. Проведение расчетов, применение ряда формул оказываются более удобными в R-символах.

Важное значение для исчисления R-символов имеет соотношение (1.2), согласно которому свойства символа Редже тесно связаны со свойствами детерминанта. Это соотношение дает возможность строить теорию R-символов независимо от классической теории угловых моментов. Так, если детерминант в левой части равенства (1.2) имеет две одинаковые строки $v_i = u_i$, то, поскольку равенство должно иметь место при произвольных величинах u_i, w_i, получаем следующее соотношение:

$$\sum_{A_{1k}+A_{2k}=J-A_{3k}}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}\frac{1}{(A_{11}!\,A_{12}!\,A_{13}!\,A_{21}!\,A_{22}!\,A_{23}!)^{1/2}} = 0. \quad (1.22)$$

Для J нечетного соотношение (1.22) тривиально, оно выполняется автоматически в силу симметрии Редже. Для J четного в обычных обозначениях Вигнера находим

$$\sum_i \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \frac{1}{\left[\prod_i (j_i - m_i)!\,(j_i + m_i)!\right]^{1/2}} = 0. \tag{1.23}$$

Отметим, что, кроме (1.23) из (1.22), в jm-записи следуют и другие соотношения, но все они получаются из (1.23) с помощью симметрии Редже рассмотренным выше методом (ср. [1]). Если равны друг другу неполные строки детерминанта, например, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, то аналогичным способом получаем

$$\sum_{\substack{R_{21}+R_{22}=J-R_{32} \\ R_{31}+R_{32}=J-R_{33}}} \begin{Vmatrix} R_{12} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} \frac{1}{(R_{21}!\ R_{22}!\ R_{31}!\ R_{32})^{1/2}} = \frac{(-1)^{R_{23}}(J!)^{1/2}}{(J+1)\,R_{11}!\ R_{12}!\ R_{23}!\ R_{33}!}\,\delta_{R_{13}0}. \tag{1.24}$$

Разбивая детерминант в степени J на произведение детерминантов в степени J_1 и J_2 ($J_1 + J_2 = J$), расписывая детерминанты по формуле (1.2) и приравнивая множители при одинаковых степенях u_i, v_i, w_i, имеем

$$\|C_{ik}\| = \left[\frac{(J_1!)^3\,(J_2!)^3\,(J_1+1)\,(J_2+1)}{(J!)^3\,(J+1)}\right]^{1/2} \sum_{A_{ik}+B_{ik}=C_{ik}} \|A_{ik}\|\,\|B_{ik}\| \frac{\left(\prod_{ik} C_{ik}!\right)^{1/2}}{\left(\prod_{ik} A_{ik}!\,B_{ik}!\right)^{1/2}}. \tag{1.25}$$

Здесь

$$\sum_i C_{ik} = J, \qquad \sum_i A_{ik} = J_1, \qquad \sum_i B_{ik} = J_2.$$

В jm-представлении одна из формул, соответствующих (1.25), имеет вид

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \left[\frac{(J_1!\,J_2!)^3}{(J!)^3}\,\frac{(J_1+1)\,(J_2+1)}{J+1}\right]^{1/2} \times$$
$$\times \sum_{\substack{j_i'+j_i''=j_i \\ m_i'+m_i''=m_i}} \begin{pmatrix} j_1' & j_2' & j_3' \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1'' & j_2'' & j_3'' \\ m_1'' & m_2'' & m_3'' \end{pmatrix} \left[\frac{\prod_{ik} A_{ik}!}{\prod_{ik} A_{ik}'!\,A_{ik}''!}\right]^{1/2}. \tag{1.26}$$

Здесь $j_1' + j_2' + j_3' = J_1$, $j_1'' + j_2'' + j_3'' = J_2$, $j_1 + j_2 + j_3 = J$.

Формула (1.25) допускает простое обобщение на произвольное число сомножителей

$$\|C_{ik}\| = \left[\frac{(J_1!)^3 \ldots (J_n!)^3\,(J_1+1)\ldots(J_n+1)}{(J!)^3\,(J+1)}\right]^{1/2} \times$$
$$\times \sum_{A_{ik}'+\ldots+A_{ik}^{(n)}=C_{ik}} \|A_{ik}'\| \ldots \|A_{ik}^{(n)}\| \left[\frac{\prod_{ik} C_{ik}!}{\prod_{ik} A_{ik}'! \ldots A_{ik}^{(n)}!}\right]^{1/2}. \tag{1.27}$$

В пределе все символы $\|A_{ik}\|$ могут быть сведены к символам первого порядка $\varphi_{A_{ik}} \frac{1}{\sqrt{2}}$, причем $\varphi_{A_{ik}} = \pm 1$, знак φ определяется в зависимости от

расстановки единиц в символе. Соотношение (1.27) при этом переходит в

$$\|C_{ik}\| = \left[\frac{\prod\limits_{ik} C_{ik}!}{(J+1)!}\right]^{1/2} \frac{1}{J!} \sum_{A'_{ik}+\ldots+A^{(n)}_{ik}=C_{ik}} \varphi_{A'_{ik}} \ldots \varphi_{A^{(n)}_{ik}} = \left[\frac{\prod\limits_{ik} C_{ik}!}{(J+1)!}\right]^{1/2} \frac{1}{J!}\Phi. \tag{1.28}$$

Множитель Ф определяется, таким образом, числом способов разбиения $\|C_{ik}\|$ на сомножители с учетом их знаков. Учитывая, что символ Редже может быть записан в виде

$$\begin{Vmatrix} q_1+p_1 & q_1+p_2 & q_1+p_3 \\ q_2+p_1 & q_2+p_2 & q_2+p_3 \\ q_3+p_1 & q_3+p_2 & q_3+p_3 \end{Vmatrix} \tag{1.29}$$

легко находим общее выражение для Ф:

$$\Phi = \sum (-1)^{q_1+q_2+q_3} \frac{J!}{p_1!\, p_2!\, p_3!\, q_1!\, q_2!\, q_3!}. \tag{1.30}$$

Подставляя Ф в формулу (1.28), получаем численное выражение символа Редже.

Рассматривая произведение двух детерминантов в степени J и используя разложение (1.2), получаем

$$\|A_{ik}\|\|B_{ik}\| = \left[\frac{\prod\limits_{ik} A_{ik}!\, B_{ik}!}{(J!)^2 (J+1)}\right]^{1/2} \sum_{\substack{l_{\sigma ik}=A_{ik} \\ l_{\sigma ik}=B_{ik}}} \|l_{ik\sigma}\| \frac{\left(\prod\limits_{ik} l_{ik\sigma}!\right)^{1/2}}{\prod\limits_{ikr} l_{ikr}}. \tag{1.31}$$

Здесь для краткости введено обозначение $l_{\sigma ik} = \sum\limits_r l_{rik}$, показатели каждого из символов Редже равны J.

Применяя инвариантные операторы $u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial v_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial w_1}$ к правой и левой частям равенства (1.2), используя известные свойства миноров детерминантов и собирая члены с одинаковыми степенями, получаем рекуррентные соотношения (см. также [1, 42]).

Итак, рассмотренные в этом параграфе следствия симметрии Редже существенно изменяют и обобщают теорию угловых моментов, переводя ее на язык R-символов.

§ 2. Высшие симметрии в теории угловых моментов

Симметрия Редже, согласно равенству (1.2), связана со свойствами детерминанта третьего ранга. Этот детерминант является инвариантом относительно унитарной унимодулярной группы SU_3 [51]. Произведения, стоящие в правой части равенства, преобразуются по представлениям SU_3; $\|R_{ik}\|$ является матрицей проектирования в группе SU_3.

Аналогично 3×3-символу $\|R_{ik}\|$ могут быть построены символы, соответствующие произвольной группе SU_n [2]. Так, для группы SU_4 разложение (1.2) принимает вид

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & t_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & t_4 \end{vmatrix}^J = \sqrt{(J!)^3 (J+1)} \sum \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{Vmatrix} \frac{\prod\limits_i u_i^{R_{1i}} v_i^{R_{2i}} w_i^{R_{3i}} t_i^{R_{4i}}}{\left(\prod\limits_{ik} R_{ik}!\right)^{1/2}}. \tag{1.32}$$

4×4-символ $\| R_{ik} \|$ имеет уже $4! \times 4! \times 2 = 1152$ правила симметрии (перестановка строк и столбцов и транспонирование). Для группы SU_n $n \times n$-символ $\| R_{ik} \|$, возникающий в разложении

$$|u_{ik}|^J = \sqrt{(J!)^3 (J+1)} \sum \| R_{ik} \| \frac{\prod\limits_{ik} u_{ik}^{R_{ik}}}{\left(\prod\limits_{ik} R_{ik}!\right)^{1/2}}, \tag{1.33}$$

насчитывает уже $n! \times n! \times 2$ симметрий. Отметим, что свойства $n \times n$-символов легко могут быть получены из свойств детерминантов аналогично развитой выше методике для 3×3-символов. Основные формулы § 1 этой главы непосредственно обобщаются на символы произвольного порядка. Если в работе Редже [37] фактически установлена связь коэффициентов КГ группы SU_2 с группой SU_3, то с помощью произвольных $n \times n$-символов в теорию угловых моментов вводятся высшие симметрии. Из определений (1.2), (1.32), (1.33) можно усмотреть конкретную связь коэффициентов КГ и их соединений с символами $\| R_{ik} \|$ для последовательных групп SU_3, $SU_4, \ldots, SU_n$. Прежде чем рассматривать эту связь, остановимся на трасформационных свойствах $n \times n$-символов. Согласно [51], список базисных инвариантов SU_n исчерпывается сверткой ковариантных и контравариантных величин и составленными из ковариантных и контравариантных векторов детерминантами в произвольной степени J. Для группы SU_3 свертка записывается в виде

$$(u_1 U_1 + u_2 U_2 + u_3 U_3)^J = J! \sum_{\sum\limits_i A_{ik} = J} \frac{u_1^{A_{11}} u_2^{A_{12}} u_3^{A_{13}} U_1^{A_{11}} U_2^{A_{12}} U_3^{A_{13}}}{A_{11}!\, A_{12}!\, A_{13}!}. \tag{1.34}$$

Сопоставляя с формулой (1.2), имеем

$$\frac{U_1^{A_{11}} U_2^{A_{12}} U_3^{A_{13}}}{(A_{11}!\, A_{12}!\, A_{13}!)^{1/2}} = \sqrt{(J+1)!} \sum_{\sum\limits_i A_{2i} = \sum\limits_i A_{3i} = J} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \frac{v_1^{A_{21}} v_2^{A_{22}} v_3^{A_{23}} w_1^{A_{31}} w_2^{A_{32}} w_3^{A_{33}}}{(A_{21}!\, A_{22}!\, A_{23}!\, A_{31}!\, A_{32}!\, A_{33}!)^{1/2}}. \tag{1.35}$$

Согласно (1.35) символ Редже $\| A_{ik} \|$ переводит определенную линейную комбинацию ковариантных составляющих в контравариантные, т. е. играет как бы роль метрического тензора в соответствующем тензорном пространстве. Разлагая в формуле (1.2) детерминант по первому столбцу и сокращая соответствующие множители, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{A_{11}!\, A_{12}!\, A_{13}!}} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}^{A_{11}} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}^{A_{12}} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}^{A_{13}} =$$
$$= \sqrt{(J+1)!} \sum \| A_{ik} \| \frac{\prod\limits_i v_i^{A_{2i}} w_i^{A_{3i}}}{\left(\prod\limits_i A_{2i}!\, A_{3i}!\right)^{1/2}}. \tag{1.36}$$

Эта формула является исходной при выводе численных значений коэффициентов КГ [25, 31]. Из (1.36) видно, как векторы базиса, контравариантного данному, выражаются через соответствующие миноры. Для группы SU_2 2×2-символ $\| A_{ik} \|$ в разложении

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^J = \sqrt{(J!)^3 (J+1)} \sum \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \frac{u_1^{A_{11}} u_2^{A_{21}} v_1^{A_{12}} v_2^{A_{22}}}{\sqrt{A_{11}!\, A_{21}!\, A_{12}!\, A_{22}!}} \tag{1.37}$$

также является метрическим тензором; в jm-записи он имеет вид $(-1)^{j-m}\delta_{m,-m}$. Сравнивая свертку векторов для группы SU_2

$$(v_1V_1+w_1W_1)^J=\sum_{R_1+R_2=J}\frac{J!}{A_1!\,A_2!}v_1^{A_1}w_2^{A_2}V_1^{A_1}W_1^{A_2} \tag{1.38}$$

с формулой (1.2), имеем

$$\frac{V_1^{A_{21}}W_1^{A_{31}}}{(A_{21}!\,A_{31})^{1/2}}=\sqrt{(J!)^3(J+1)}\sum_{A_{22},A_{23},A_{32},A_{33}}\begin{Vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{Vmatrix}\frac{v_2^{A_{22}}v_3^{A_{32}}w_2^{A_{23}}w_3^{A_{33}}}{(A_{22}!\,A_{32}!\,A_{23}!\,A_{33}!)^{1/2}}. \tag{1.39}$$

Таким образом, любые две компоненты, стоящие в одной строке или в одном столбце символа $\|R_{ik}\|$, преобразуются по представлению группы SU_2. Все инварианты группы вращений (SU_2), включая произвольные j-символы и трансформационные матрицы, преобразуются по представлениям группы SU_3. Используя аналогичные трансформационные свойства и метрические тензоры произвольных групп SU_n, можно строить различные соединения коэффициентов КГ (и любых символов $\|R_{ik}\|$). При этом особый интерес представляет рассмотрение соединений нового типа. В качестве примера рассмотрим группу SU_4. Разлагая детерминант в левой части равенства (1.32) по четвертому столбцу, имеем

$$\begin{vmatrix}u_1&v_1&w_1&t_1\\u_2&v_2&w_2&t_2\\u_3&v_3&w_3&t_3\\u_4&v_4&w_4&t_4\end{vmatrix}^J=\sum_{\sum\limits_k A_{ik}=J}\frac{J!}{A_{11}!\,A_{12}!\,A_{13}!\,A_{14}!}t_1^{A_{11}}t_2^{A_{12}}t_3^{A_{13}}t_4^{A_{14}}\times$$
$$\times\begin{vmatrix}w_2&w_3&w_4\\v_2&v_3&v_4\\u_2&u_3&u_4\end{vmatrix}^{A_{11}}\begin{vmatrix}w_1&w_3&w_4\\v_1&v_3&v_4\\u_1&u_3&u_4\end{vmatrix}^{A_{12}}\begin{vmatrix}w_1&w_2&w_4\\v_1&v_2&v_4\\u_1&u_2&u_4\end{vmatrix}^{A_{13}}\begin{vmatrix}w_1&w_2&w_3\\v_1&v_2&v_3\\u_1&u_2&u_3\end{vmatrix}^{A_{14}} \tag{1.40}$$

Используя соотношения (1.2), (1.32) и приравнивая члены при одинаковых степенях u_i, v_i, w_i, t_i, получаем для 4×4-символа

$$\sqrt{(J+1)}\begin{Vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{34}\\A_{41}&A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{Vmatrix}=$$
$$=\sqrt{\prod_i(A_{1i}+1)}\sum_{\sum\limits_{\beta\neq\alpha}B^\beta_{i\alpha}=A_{i\alpha}}\frac{\left(\prod\limits_{ik}A_{ik}!\right)^{1/2}}{\left(\prod\limits_{\substack{\beta=1,2,3,4\\ \alpha\neq\beta}}B^\beta_{2\alpha}!\,B^\beta_{3\alpha}!\,B^\beta_{4\alpha}!\right)^{1/2}}\times$$
$$\times\begin{Vmatrix}B^1_{22}&B^1_{23}&B^1_{24}\\B^1_{32}&B^1_{33}&B^1_{34}\\B^1_{42}&B^1_{43}&B^1_{44}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}B^2_{21}&B^2_{23}&B^2_{24}\\B^2_{31}&B^2_{33}&B^2_{34}\\B^2_{41}&B^2_{43}&B^2_{44}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}B^3_{21}&B^3_{22}&B^3_{24}\\B^3_{31}&B^3_{32}&B^3_{34}\\B^3_{41}&B^3_{42}&B^3_{44}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}B^4_{21}&B^4_{22}&B^4_{23}\\B^4_{31}&B^4_{32}&B^4_{33}\\B^4_{41}&B^4_{42}&B^4_{43}\end{Vmatrix} \tag{1.41}$$

В этой формуле, в отличие от обычного в теории коэффициентов КГ суммирования по комбинациям из двух символов, проводится суммирование по комбинациям из трех символов.

Аналогичное разложение может быть записано для 5×5-символа, при этом в одной сумме участвуют уже четыре символа. Вообще свойства про-

извольных $n \times n$-символов $\| R_{ik} \|$ связаны со специфическими особенностями групп SU_n. Используя разложение по строке или столбцу $n \times n$-символа, мы можем выразить его через сумму произведений $(n-1) \times \times (n-1)$-символов. В свою очередь, разлагая $(n-1) \times (n-1)$-символы и т. д., выражаем последовательно $n \times n$-символ через символы меньшего ранга до символа Редже (3×3-символа).

Представляет интерес сопоставление рассмотренных выше соединений символов $\| R_{ik} \|$ с обычными соединениями коэффициентов КГ (т. е. с инвариантами относительно группы SU_2), когда в суммирование включаются только два коэффициента. В общем же случае с помощью метрических тензоров объединяются n символов в соответствии с показателем группы SU_n. При конкретном анализе различных соединений символов $\| R_{ik} \|$ удобнее всего исходить из произведений соответствующих детерминантов. В некотором смысле соединения коэффициентов КГ обычного типа являются подсимволами $n \times n$-символов. В качестве примера рассмотрим коэффициент Рака.

В [1] был приведен $6j$-символ Вигнера в виде таблицы 3×4:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Vmatrix} j+j_3-j_{12} & j_1+j-j_{23} & j_2+j_3-j_{23} & j_1+j_2-j_{12} \\ j_3+j_{23}-j_2 & j_1+j_{12}-j_2 & j_3+j_2-j & j_1+j_{23}-j \\ j+j_{23}-j_1 & j+j_{12}-j_3 & j_2+j_{12}-j_1 & j_2+j_{23}-j_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_1 & x_3+y_1 & x_4+y_1 \\ x_1+y_2 & x_2+y_2 & x_3+y_2 & x_4+y_2 \\ x_1+y_3 & x_2+y_3 & x_3+y_3 & x_4+y_3 \end{Vmatrix} \tag{1.42}$$

Рассматриваемый символ является частью более общей таблицы 4×4, соответствующей 4×4-символу:

$$\begin{Vmatrix} x_1+y_1 & x_4+y_2 & x_2+y_3 & x_3+y_4 \\ x_2+y_2 & x_3+y_1 & x_1+y_4 & x_4+y_3 \\ x_3+y_3 & x_2+y_4 & x_4+y_1 & x_1+y_2 \\ x_4+y_4 & x_1+y_3 & x_3+y_2 & x_2+y_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_1 & x_3+y_1 & x_4+y_1 \\ x_1+y_2 & x_2+y_2 & x_3+y_2 & x_4+y_2 \\ x_1+y_3 & x_2+y_3 & x_3+y_3 & x_4+y_3 \\ x_1+y_4 & x_2+y_4 & x_3+y_4 & x_4+y_4 \end{Vmatrix} \tag{1.43}$$

В j-записи символ (1.43) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} j+j_3-j_{12} & j_1+j_{23}-j & j+j_{12}-j_3 & j_2+j_3+j_{12}+\frac{1}{2}J \\ j_1+j_{12}-j_2 & j_2+j_3-j_{23} & j_3+j+j_{23}+\frac{1}{2}J & j_2+j_{23}-j_3 \\ j_2+j_{12}-j_1 & j_1+j_{12}+j+\frac{1}{2}J & j_1+j_2-j_{12} & j_3+j_{23}-j_2 \\ j_1+j_2+j_{23}+\frac{1}{2}J & j+j_{23}-j_1 & j_3+j_{12}-j & j_1+j-j_{23} \end{Vmatrix} \tag{1.44}$$

где $^1/_2\, J = j_1 + j_2 + j_3 + j + j_{12} + j_{23}$.

Символ (1.44) можно выразить через линейную комбинацию коэффициентов Рака, которая должна обладать уже не $3! \times 4!$, а $4! \times 4! \times 2$ свойствами симметрии и на которую распространяется обобщение формул (1.23) — (1.31). Аналогичное рассмотрение может быть проведено для произвольных трансформационных матриц. Следует отметить, что наряду с j-символами через $n \times n$-символы могут быть выражены и обобщенные

коэффициенты КГ. В частных случаях такие выражения тривиальны, например,

$$(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3\,|\,jm) = \frac{(-1)^{2j_1}}{(2j_{12}+1)!}\left[\frac{(2j_1)!}{2(j_1+j_3)!}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} 2j_2 & 2j_1+2j_3 & 0 & 0 \\ 2j_3 & 0 & 2j_2 & 0 \\ j_1-m_1 & j_2-m_2 & j_3-m_3 & j_4-m_4 \\ j_1+m_1 & j_2+m_2 & j_3+m_3 & j_4+m_4 \end{Vmatrix} \qquad (1.45)$$

где $j_{12} = j_1 + j_2$, $j = j_{12} + j_3$ (см. также § 4 этой главы).

$n \times n$-Символы обсуждались в ряде работ. Следует отметить статью Джиованнини и Смита [45], в которой $n \times n$-символы рассматриваются как магические квадраты. Указывается на особое значение $n \times n$-символов первого ранга (ср. формулу (1.28), где из этих символов строятся символы произвольного ранга). Эти символы образуют группу $n \times n$-матриц, изоморфную группе перестановок S_n (см. также гл. III). В данной работе рассмотрено также обобщение $n \times n$-символов. Это Q_n-символы, элементами которых являются любые рациональные числа (а не обязательно — положительные целые). Алгебра Q_n является векторным пространством над рациональным полем. Совокупность подпространств этого пространства образует проективную геометрию (см. также гл. III). На основе представления $6j$-символа в форме (1.44) [2] дана алгебраическая интерпретация известного соотношения между $3j$- и $6j$-символами [44]

$$\lim_{p\to\infty}\begin{Vmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3+p & j+p & j_{23}+p \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j-j_{23} & j_{23}-j_3 & j_3-j \end{pmatrix} \qquad (1.46)$$

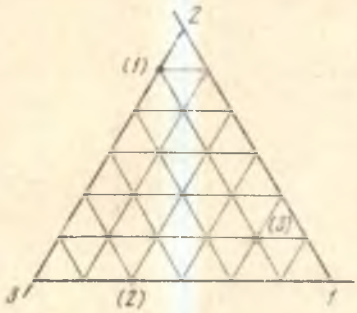
как проектирование векторного пространства Q_n в определенное подпространство. В работе Бинсера [43] рассмотрены интерпретация симметрии Редже и высших симметрий как симметрий редукции и переход к классическому пределу. Используя технику бозонных операторов, Бинсер, в частности, показал, что нетривиальные элементы симметрии Редже связаны с симметрией между различными соединениями бозонных операторов, возникающих при редукции кронекеровского произведения.

Итак, в обобщенной теории угловых моментов содержатся высшие симметрии SU_n (в принципе могут быть включены и их подгруппы Sp $(2n)$, O_n и т. д.), т. е. из обычных коэффициентов КГ могут быть построены соединения, обладающие высшей симметрией Справедливо и обратное: коэффициенты КГ высших групп могут быть построены на основе теории угловых моментов (см. гл. III и IV).

§ 3. Графическая и геометрическая интерпретации

Графические методы в классической теории угловых моментов были довольно детально разработаны [34], однако новые симметрии коэффициентов КГ и их соединений открывают дополнительные возможности графической интерпретации. Остановимся прежде всего на симметрии Редже.

Для графической интерпретации символов Редже воспользуемся треугольными координатами на плоскости [1]. Построим равносторонний треугольник, стороны которого являются координатными осями. Перпендикулярно осям откладываются значения координат. Положительным считается направление внутрь треугольника. Для любой точки сумма ее



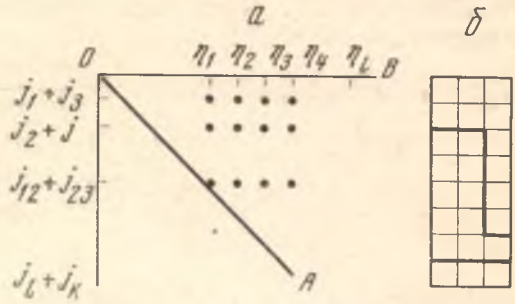


Рис. 3. Графическая интерпретация символа Редже

Рис. 4. Схематические иллюстрации $6j$-символа (*а*) и символа Редже (*б*)

треугольных координат является постоянной и равна I. Будем считать значения трех строк символа координатами трех точек. Тогда согласно (1.1) сумма координат каждой точки равна J. Кроме того, вследствие неотрицательности и целочисленности R_{ik} следует рассматривать лишь точки, лежащие внутри треугольника и только на пересечениях координатной сетки (рис. 3). Сумма расстояний всех точек от каждой из осей также равна J. Задание двух точек в этой системе координат автоматически определяет третью. Нумеруем оси *1*, *2*, *3* и точки (*1*), (*2*), (*3*). 72 правила симметрии позволяют переставлять оси и точки и в определенном смысле менять их местами.

Это может быть интерпретировано следующим образом: симметрия Редже состоит из перестановочной симметрии (при которой можно любую из трех точек переставлять местами) и симметрии системы координат. Последняя состоит из вращений треугольника — C_3, отражения в плоскости треугольника — σ_h и отражения относительно высоты треугольника — σ_v, т. е. имеется группа $C_{3v} \times C_s$. Рассматриваемая симметрия соответствует трем одинаковым частицам, расположенным в вершинах правильного треугольника. Изложенная интерпретация может оказаться полезной при обобщениях на комплексную плоскость.

В качестве примера на рис. 3 приведено графическое изображение символа

$$\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \cdots \tag{1.47}$$

Из графического способа записи коэффициента Редже следует простое представление символа (1.4):

$$\begin{Bmatrix} j & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \eta_1 - (j_1 + j_3) & \eta_2 - (j_1 + j_3) & \eta_3 - (j_1 + j_3) & \eta_4 - (j_1 + j_3) \\ \eta_1 - (j_2 + j) & \eta_2 - (j_2 + j) & \eta_3 - (j_2 + j) & \eta_4 - (j_2 + j) \\ \eta_1 - (j_{12} + j_{23}) & \eta_2 - (j_{12} + j_{23}) & \eta_3 - (j_{12} + j_{23}) & \eta_4 - (j_{12} + j_{23}) \end{Vmatrix} \tag{1.48}$$

Здесь η_1, η_2, η_3, η_4 — суммы моментов в нижней строке $6j$-символа; $(j_i + j_k)$ — суммы моментов, не имеющих общей триады. Графическая иллюстрация (1.48) приведена на рис. 4, *а*. 12 точек, характеризующих коэф-

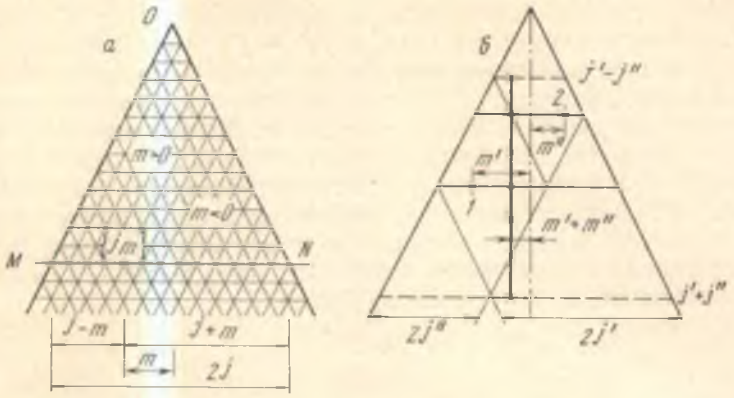


Рис. 5. Сложение моментов в треугольной системе координат

фициент $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$, находятся на пересечениях соответствующих прямых. Коэффициент Рака отличен от нуля только тогда, когда все точки находятся в секторе AOB.

Отметим также связь символа Редже с перестановочной симметрией. Элементы каждой из строк символа Редже являются разбиением числа J на целые неотрицательные слагаемые. Каждому разбиению соответствует определенная схема Юнга. Различным символам соответствуют различные разбиения прямоугольника $3 \times J$ на схемы Юнга (рис. 4, *б*). Симметрия Редже связана с перестановками базисных спиноров. Для произвольных $n \times n$-символов обобщение предложенной графической интерпретации очевидно. Если для 3×3-символа значения R_{ik} являются барицентрическими координатами [95] трех точек на плоскости, то для 4×4-символа они являются барицентрическими координатами четырех точек в пространстве. Система координат задается правильным тетраэдром. Расстояния точки от сторон тетраэдра являются ее координатами. Сумма координат каждой точки, равно как и сумма расстояний всех четырех точек от данной координатной плоскости, постоянна и равна J. Для произвольного $n \times n$-символа значения R_{ik} являются барицентрическими координатами n точек в $(n-1)$-мерном пространстве. Система координат задается правильным n-мерным симплексом (см. также гл. II). Качественно новой особенностью рассматриваемой интерпретации является возможность нахождения численных значений $n \times n$-символов чисто геометрическим путем.

Рассмотрим на примере символа Редже задачу сложения моментов вплоть до определения численных значений, используя введенную выше треугольную систему координат [12]. На рис. 5, *а* представлена координатная сетка, состоящая из равносторонних треугольников со стороной, равной единице. Прямые OM и ON выбраны в качестве координатных осей. Координаты определяются как расстояния до осей. Прямые, параллельные MN, будем называть «горизонтами». Моменту j с проекцией m $\{jm\}$ соответствует точка с координатами $(j-m,\ j+m)$. Согласно условию $j \geqslant |m|$ моменты $\{jm\}$ лежат внутри координатного угла и при изменении m от $-j$ до j пробегают все узлы координатной сетки, лежащие на данном горизонте. Проекция m равна расстоянию точки $\{jm\}$ до биссектрисы координатного угла. При сложении моментов $\{j'm'\}$ и $\{j''m''\}$ точки, соответствующие результирующему моменту $\{jm\}$, лежат на вер-

тикали, отстоящей от биссектрисы на расстоянии $m' + m''$, между горизонтами, соответствующими $j' + j''$ и $|(j' - j''|$ (рис. 5, *б*).

Наряду со сложением моментов можно графически представить и соответствующие коэффициенты Вигнера. Для этого удобно несколько модифицировать рассмотренную систему координат. Введем еще одну координатную ось — горизонт, проходящий через точку $(J, 0)$, где $J = j_1 + j_2 + j_3$ (рис. 5, *б*). Координаты отсчитываются внутрь полученного треугольника. Коэффициент Вигнера изображается на графике тремя точками 1, 2, 3 (рис. 6). Сумма всех трех координат каждой точки, так же как и сумма расстояний всех точек до каждой из осей, равна J. Все эти координаты являются элементами символа Редже

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} -j_1 + j_2 + j_3 & j_1 - j_2 + j_3 & j_1 + j_2 - j_3 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 \end{Vmatrix} = \| R_{ik} \|. \tag{1.49}$$

Отметим, что алгебраическая сумма расстояний трех точек до биссектрисы любого угла координатного треугольника равна нулю соответственно требованию $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ и симметрии символа (1.49).

Для графического расчета коэффициента Вигнера используем формулы (1.28), (1.30):

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\prod_i R_{2i}!\, R_{3i}!}{\prod_i R_{1i}!\,(J+1)}} \sum \frac{(-1)^{q_1}(p_1+q_1)!}{p_1!\,q_1!} \times$$

$$\times \frac{(-1)^{q_2}(p_2+q_2)!}{p_2!\,q_2!} \frac{(-1)^{q_3}(p_3+q_3)!}{p_3!\,q_3!}. \tag{1.50}$$

Суммирование здесь производится по всем целым неотрицательным числам p_i, q_i, удовлетворяющим системе девяти уравнений:

$$\begin{Vmatrix} p_1 + q_1 & p_2 + q_2 & p_3 + q_3 \\ p_3 + q_2 & p_1 + q_3 & p_2 + q_1 \\ p_2 + q_3 & p_3 + q_1 & p_1 + q_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -j_1 + j_2 + j_3 & j_1 - j_2 + j_3 & j_1 + j_2 - j_3 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 \end{Vmatrix} \tag{1.51}$$

Рассмотрим три треугольника с вершинами в точках (*1*, *2*, *3*), соответствующих коэффициенту Вигнера, с основаниями на оси *I* (рис. 7, *а*). Произведем отражение треугольника *2* относительно высоты координатного треугольника, а треугольника *3* — относительно высоты отраженного треугольника *2'*. Координатами вершин треугольников являются точка 1: $-j_1 + j_2 + j_3$, $j_1 + m_1$, $j_1 - m_1$; точка 2': $j_1 - j_2 + j_3$, $j_1 + m_2$ $j_2 - m_2$; точка 3': $j_1 + j_2 - j_3$, $j_3 + m_3$, $j_3 - m_3$. Каждой точке C_i ($i = 1, 2', 3'$) оснований треугольников 1, 2' и 3' (рис. 7, *б*), отстоящей от боковой вершины A_1, на произвольном расстоянии p_1 ставим в соответствие величину $\alpha_i = [(-1)^{q_i}(p_i + q_i)!]/p_i!\,q_i!$, являющуюся коэффициентом разложения бинома $(x - y)^{p_i+q_i}$. Совокупность биномиальных коэффициентов может быть представлена треугольником Паскаля. Численное значение величины α_i находится на основании треугольника Паскаля со стороной $p_i + q_i$ на расстоянии p_i от боковой вершины (рис. 7, *б*). Если точка C (рис. 7, *а*) лежит на отрезке $A_2'B_3'$, общем для оснований треугольников *1*, *2'* и *3'*, то она делит эти основания на части, равные соответственно p_1 и q_1, p_2 и q_2, p_3 и q_3 и удовлетворяющие условиям (1.51). В самом деле, основания A_1B_1, $A_2'B_2'$ и $A_3'B_3'$ равны $R_{11} = p_1 + q_1$, $R_{12} = p_2 + q_2$, $R_{13} = p_3 + q_3$. Пусть $A_1C = p_1$, тогда $CB_1 = q_1$; $CB_2' = q_2$,

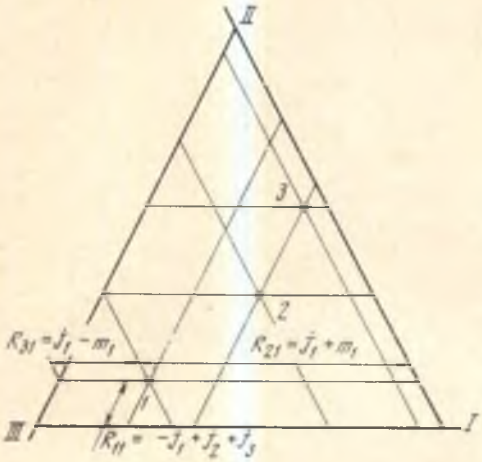


Рис. 6. Графическое представление коэффициентов Вигнера

Рис. 7. Графическая методика вычисления коэффициентов Вигнера

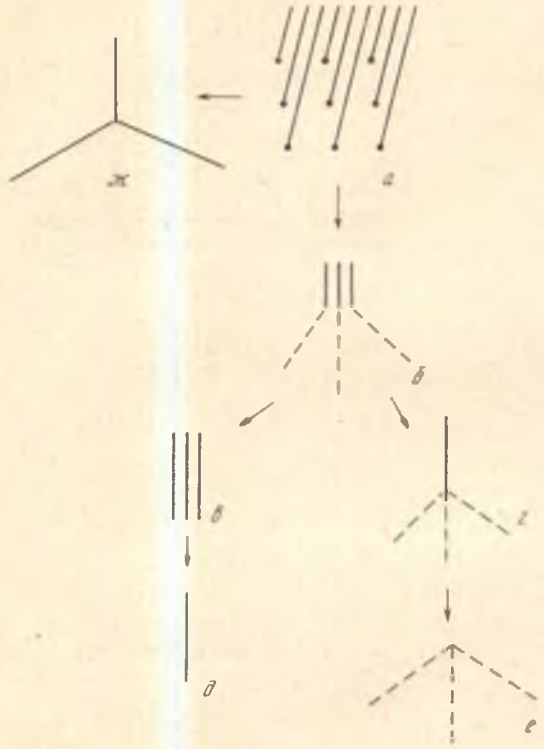


Рис. 8. Редукция графических методов

$CB_3' = q_3, \qquad A_2'C = MA_1 + A_1C - MA_2' = (p_2 + q_3) + p_1 - B_2N = p_2,$
$A_3'C = A_3'A_2' + A_2'C = B_2'N - B_3N + p_2 = MA_2 - (p_2 + q_1) + p_2 = p_3.$

Произведение величин α_1, α_2, α_2, соответствующих точке C, дает один из членов суммы в (1.50). Суммирование в (1.50) производится по всем положениям точки C на отрезке $A_2'B_3'$. Постоянный множитель вычисляется подстановкой соответствующих координат точек (*1*, *2*, *3*).

Рассмотрим пример. Для коэффициента Вигнера $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 1 \end{Vmatrix}$ постоянный множитель (1.50) равен $\frac{1}{30\sqrt{7\cdot 11\cdot 13}}$. Согласно построению (рис. 7, *а*) отрезок $A_2'B_3'$ включает две точки и сумма (1.50) равна 70. Отсюда $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{11\cdot 13}}$. Данная схема может применяться и для случая сложения нескольких моментов.

Как видно из приведенной интерпретации, геометрическим образом $n \times n$-символа является в общем случае $(n - 1)$-мерный симплекс, задаваемый $(n - 1)$ точками в системе координат правильного координатного симплекса. Положения точек n-мерного симплекса внутри координатного правильного n-мерного симплекса задают численное значение $(n + 1) \times \times (n + 1)$-символа. Методика, рассмотренная выше для 3×3-символа, в принципе легко обобщается на $n \times n$-символ. Следует отметить и возможность связи численных значений с размерами симплекса. Это вытекает, в частности, из зависимости численного значения от конкретных положений вершин симплекса. Связь численного значения коэффициента Рака с размерами тетраэдра в классическом пределе обсуждалась в работе Понзано и Редже [44].

Наряду с геометрической интерпретацией $n \times n$-символов представляет интерес и непосредственное обобщение графических методов классической теории угловых моментов на символ Редже. При этом девяти элементам символа $\| R_{ik} \|$ сопоставляется девять свободных концов (рис. 8, *а*). Соединение концов отвечает суммированию символов Редже $\| R_{ik} \|$ по соответствующим элементам R_{ik}. Это наиболее общее графическое рассмотрение соединений коэффициентов Вигнера, другие методы получаются как частные случаи.

Редукция графических методов представлена на рис. 8. Рис. *б* соответствует формулировке *jm*-теории, когда суммирование проводится по верхней строке и по столбцам двух нижних строк, рис. *в* — суммирование по триадам (*j*-символы), рис. *г* и *д* — упрощенные графики (см. также [7]), рис. *е* — обычное суммирование по проекциям[34], рис. *ж* — по графику R-символа как матрицы метрики в пространстве представлений группы SU_3.

Обобщенное графическое рассмотрение соединений коэффициентов Вигнера может оказаться полезным при анализе нестандартного суммирования, а также для общей теории $n \times n$-символов, хотя несомненно любые графические рассмотрения носят вспомогательный характер, в отличие от интерпретации, где имеется органический перевод основных понятий обобщенной теории угловых моментов (включая высшие симметрии) на язык многомерной геометрии.

§ 4. $n \times n$-Символы. Производящие инварианты

В этом параграфе рассмотрены некоторые свойства $n \times n$-символов. Исходным пунктом является определение $n \times n$-символа как коэффициента в разложении детерминанта в степени J (1.33). Соотношения между различными $n \times n$-символами вытекают из свойств соответствующих детерминантов. Например, для 4×4-символа имеем

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_{1\cdot\cdot\cdot} & B_{2\cdot\cdot\cdot} & B_{3\cdot\cdot\cdot} & B_{4\cdot\cdot\cdot} \\ B_{\cdot 1\cdot\cdot} & B_{\cdot 2\cdot\cdot} & B_{\cdot 3\cdot\cdot} & B_{\cdot 4\cdot\cdot} \\ B_{\cdot\cdot 1\cdot} & B_{\cdot\cdot 2\cdot} & B_{\cdot\cdot 3\cdot} & B_{\cdot\cdot 4\cdot} \\ B_{\cdot\cdot\cdot 1} & B_{\cdot\cdot\cdot 2} & B_{\cdot\cdot\cdot 3} & B_{\cdot\cdot\cdot 4} \end{Vmatrix} = \left[\frac{\prod\limits_{ik} R_{ik}! \prod\limits_{i} (R_{1i}+1)!}{(J+1)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum \frac{\begin{Vmatrix} B_{12\cdot\cdot} & B_{13\cdot\cdot} & B_{1\cdot\cdot\cdot} \\ B_{1\cdot 2\cdot} & B_{1\cdot 3\cdot} & B_{1\cdot 4\cdot} \\ B_{1\cdot\cdot 2} & B_{1\cdot\cdot 3} & B_{1\cdot\cdot 4} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_{21\cdot\cdot} & B_{23\cdot\cdot} & B_{24\cdot\cdot} \\ B_{2\cdot 1\cdot} & B_{2\cdot 3\cdot} & B_{2\cdot 4\cdot} \\ B_{2\cdot\cdot 1} & B_{2\cdot\cdot 3} & B_{2\cdot\cdot 4} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_{31\cdot\cdot} & B_{32\cdot\cdot} & B_{34\cdot\cdot} \\ B_{3\cdot 1\cdot} & B_{3\cdot 2\cdot} & B_{3\cdot 4\cdot} \\ B_{3\cdot\cdot 1} & B_{3\cdot\cdot 2} & B_{3\cdot\cdot 4} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_{41\cdot\cdot} & B_{42\cdot\cdot} & B_{43\cdot\cdot} \\ B_{4\cdot 1\cdot} & B_{4\cdot 2\cdot} & B_{4\cdot 3\cdot} \\ B_{4\cdot\cdot 1} & B_{4\cdot\cdot 2} & B_{4\cdot\cdot 3} \end{Vmatrix}}{\left[\prod\limits_{ik} B_{i\cdot\cdot k}! \, B_{\cdot i\cdot k}! \, B_{\cdot\cdot i k}! \right]^{1/2}}. \tag{1.52}$$

Здесь величины $B_{i\cdot\cdot\cdot}$, $B_{i\cdot k}$ и т. д. являются суммами вида $B_{1\cdot 3\cdot} = B_{1234} + B_{1432}$, $B_{\cdot 2\cdot\cdot} = B_{1234} + B_{1243} + B_{3214} + B_{3241} + B_{4213} + B_{4231}$. Индексы на месте точек пробегают все допустимые значения. Разложение типа (1.52) $n \times n$-символа по 2×2-символам задает численное значение $n \times n$-символа[3]

$$\| R_{ik}^{(n)} \| = \left[\frac{\prod\limits_{ik} R_{ik}!}{(J+1)!} \right]^{1/2} \sum_{P(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \frac{(-1)^{\text{неч}\, P(\alpha)} \sum\limits_{P(\alpha)} B_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\prod\limits_{P(\alpha)} B_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}!}, \tag{1.53}$$

[3] Численное значение $n \times n$-символа может быть также получено непосредственным обобщением формул (1.28) — (1.30). В этом случае общий $n \times n$-символ выражается через сумму произведений $n \times n$-символов первого ранга ($J = 1$), изоморфных представлению группы перестановок S_n.

где $R_{ik} = B_{\underset{i}{\ldots k \ldots}}$, $P(\alpha) = P(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ — перестановка n индексов $(1, 2, \ldots, n)$.

В частных случаях 3×3- и 2×2-символов эта формула имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} = \left[\frac{\prod\limits_{i,\,k=1}^{3} R_{ik}!}{(J+1)!} \right]^{1/2} \sum \frac{(-1)^{\sum q_i}}{\prod\limits_{i=1}^{3} p_i!\, q_i!}, \tag{1.54}$$

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{Vmatrix} = \left[\frac{\prod\limits_{i,\,k=1}^{2} R_{ik}!}{(J+1)!} \right]^{1/2} \sum \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2} p_i!}. \tag{1.55}$$

Приведем здесь также численное значение $6j$-символа, записанного в форме 3×4-символа [7, 42]:

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} & R_{41} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} & R_{42} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & R_{43} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_1 + y_3 & x_1 + y_4 \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 & x_2 + y_3 & x_2 + y_4 \\ x_3 + y_1 & x_3 + y_2 & x_3 + y_3 & x_3 + y_4 \end{Vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\prod\limits_{ik} R_{ik}!}{\prod\limits_{i} \sum\limits_{k=1}^{3} (R_{ik} + 1)} \right]^{1/2} \sum \frac{(-1)^{\alpha} (\alpha + 1)}{\prod\limits_{ik} x_i!\, y_k!}, \tag{1.56}$$

где $\alpha = \sum\limits_i x_i + \sum\limits_k y_k$. Суммирование проводится по всем допустимым значениям x_i, y_k.

Отметим, что форма разложения (1.52), вытекающая из свойств детерминантов, весьма удобна для рассмотрения любых $n \times n$-символов. Для $n \times n$-символов детерминант играет роль производящей функции. (Из работ по применению метода производящей функции для коэффициентов КГ следует особо указать на [42, 96]). Для построения теории существенны формулы суммирования $n \times n$-символов различного ранга. Например,

$$\sum_{R_{23},\, R_{33},\, R'_{23},\, R'_{33}} \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ R'_{21} & R'_{22} & R'_{23} \\ R'_{31} & R'_{32} & R'_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{23} & R'_{23} \\ R_{33} & R'_{33} \end{Vmatrix} \tag{1.57}$$

$$\sum_{R_{24},\, R_{34},\, R_{44}} \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ R_{44} & R_{45} & R_{46} \end{Vmatrix}. \tag{1.58}$$

Формулам (1.57) и (1.58) соответствуют определенные производящие функции, являющиеся суммой произведений соответствующих детерминантов. Они имеют следующий вид:

$$\sum \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & \varepsilon_{k_1,1} \\ u_2 & v_2 & \varepsilon_{k_2,2} \end{vmatrix}^{J_1} \begin{vmatrix} u'_0 & v'_0 & w'_0 \\ u'_1 & v'_1 & \varepsilon_{i_1,1} \\ u'_2 & v'_2 & \varepsilon_{i_2,2} \end{vmatrix}^{J_2} \begin{vmatrix} \varepsilon_{k_1,1} & \varepsilon_{i_1,1} \\ \varepsilon_{k_2,2} & \varepsilon_{i_2,2} \end{vmatrix}^{I} \tag{1.59}$$

Суммирование здесь проводится так, чтобы данное выражение было инвариантным по индексам 1.2:

$$\sum \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & t_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 & \delta_{1k_1} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \delta_{2k_2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \delta_{3k_3} \end{vmatrix}^{J_1} \begin{vmatrix} \delta_{1k_1'} & x_1 & y_1 \\ \delta_{2k_2'} & x_2 & y_2 \\ \delta_{3k_3'} & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^{J_2} \left(\prod_i \delta_{k_i k_i'}\right)^I. \tag{1.60}$$

Будем называть выражения такого типа *производящими инвариантами*. Этот термин выбран в силу инвариантных свойств детерминантов для групп SU_n (и других полупростых групп Ли). Коэффициенты разложения сумм произведений таких детерминантов играют роль обобщенных коэффициентов Вигнера, возникающих при сложении двух или нескольких неприводимых представлений (см. также метод производящих полиномов [25]). Так, производящим инвариантом коэффициента Редже является детерминант $(\varepsilon_{ikl}u_{1i}u_{2k}u_{3l})^I$, метрического тензора SU_2 (2×2-символа) — $(\varepsilon_{\mu\nu}u_{1\mu}u_{2\nu})^I$:

$$(\varepsilon_{\lambda\mu}u_{1\lambda}u_{2\mu})^J = \sqrt{(J!)^3(J+1)} \sum \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{Vmatrix} \frac{\prod_{ik} u_{ik}^{R_{ik}}}{\left(\prod_{ik} R_{ik}!\right)^{1/2}}. \tag{1.61}$$

Производящие инварианты любых соединений коэффициентов КГ для SU_2 могут быть построены с помощью ε_{ikl} и $\varepsilon_{\chi\mu}$. Так, например, производящий инвариант для произведения двух коэффициентов КГ, просуммированных по проекциям m_1, m_2, имеет вид

$$(\varepsilon_{lmn}u_{1\underline{l}}u_{2\underline{m}}u_{3n})^J(\varepsilon_{l'm'n'}u_{1\underline{l}'}u_{2\underline{m}'}u_{3n'})^{J'}(\varepsilon_{\lambda\lambda'})^{B_1}(\varepsilon_{\mu\mu'})^{B_2}. \tag{1.62}$$

Здесь индексы l, m, n принимают всю совокупность возможных значений 1, 2, 3; подчеркнутые индексы $\underline{l}$, $\underline{m}$, $\underline{n}$ принимают только одно значение 1; соответствующие l, m, n индексы λ, μ, ν принимают оставшиеся значения 2, 3. В этих обозначениях производящий инвариант для коэффициента Рака ($6l$-символа) может быть записан в виде

$$(\varepsilon_{l_1m_1n_1}u_{1\underline{l}_1}u_{2\underline{m}_1}u_{3\underline{n}_1})^{J_1}(\varepsilon_{l_2m_2n_2}u_{1\underline{l}_2}^2u_{2\underline{m}_2}^2u_{3\underline{n}_2}^2)^{J_2}(\varepsilon_{l_3m_3n_3}u_{1\underline{l}_3}^3u_{2\underline{m}_3}^3u_{3\underline{n}_3}^3)^{J_3}(\varepsilon_{l_4m_4n_4}u_{1\underline{l}_4}^4u_{2\underline{m}_4}^4u_{3\underline{n}_4}^4)^{J_4}\times$$
$$\times(\varepsilon_{\lambda_1\lambda_2})^{B_{12}}(\varepsilon_{\mu_1\mu_3})^{B_{13}}(\varepsilon_{\nu_1\nu_4})^{B_{14}}(\varepsilon_{\lambda_3\lambda_4})^{B_{34}}(\varepsilon_{\mu_2\mu_4})^{B_{24}}(\varepsilon_{\nu_2\nu_3})^{B_{23}}. \tag{1.63}$$

Аналогично записываются производящие инварианты для любого соединения коэффициентов Вигнера, любой трансформационной матрицы. Коэффициенты же разложения производящих инвариантов по степеням u_{ik} являются соединениями коэффициентов Вигнера. Так, произведение коэффициентов Вигнера, соответствующее производящему инварианту (1.62), равно

$$\sum \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{11}' & R_{12}' & R_{13}' \\ R_{21}' & R_{22}' & R_{23}' \\ R_{31}' & R_{32}' & R_{33}' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{21} & R_{21}' \\ R_{31} & R_{31}' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{22} & R_{22}' \\ R_{32} & R_{32}' \end{Vmatrix} \tag{1.64}$$

Суммирование проводится по повторяющимся R_{ik}, $6j$-символ, соответствующий производящему инварианту (1.63), равен

$$\sum \begin{Vmatrix} R_{11}' & R_{12}' & R_{13}' \\ R_{21}' & R_{22}' & R_{23}' \\ R_{31}' & R_{32}' & R_{33}' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{13}^2 \\ R_{21}^2 & R_{22}^2 & R_{23}^2 \\ R_{31}^2 & R_{32}^2 & R_{33}^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{11}^3 & R_{12}^3 & R_{13}^3 \\ R_{21}^3 & R_{22}^3 & R_{23}^3 \\ R_{31}^3 & R_{32}^3 & R_{33}^3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{11}^4 & R_{12}^4 & R_{13}^4 \\ R_{21}^4 & R_{22}^4 & R_{23}^4 \\ R_{31}^4 & R_{32}^4 & R_{33}^4 \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \begin{Vmatrix} R_{21}' & R_{21}^2 \\ R_{31}' & R_{31}^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{22}' & R_{22}^3 \\ R_{32}' & R_{32}^3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{23}' & R_{23}^4 \\ R_{33}' & R_{33}^4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{21}^3 & R_{21}^4 \\ R_{31}^3 & R_{31}^4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{22}^2 & R_{22}^4 \\ R_{32}^2 & R_{32}^4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{23}^2 & R_{23}^3 \\ R_{33}^2 & R_{33}^3 \end{Vmatrix} \tag{1.65}$$

Коэффициент КГ равен произведению коэффициента Вигнера на метрический тензор

$$\sum \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{23} & R_{23}^{*} \\ R_{33} & R_{33}^{*} \end{Vmatrix} \tag{1.66}$$

В общем все величины теории момента количества движения могут быть записаны через сумму произведений 2×2- и 3×3-символов.

Производящие инварианты дают значительную информацию о соответствующих соединениях коэффициентов Вигнера. Из них вытекают, например, все правила симметрии. Так, правила симметрии $6j$-символа сразу следуют из (1.63):

$$A_{12} + A_{32} = A_{14} + A_{34}, \tag{1.67}$$

где $A_{ik} = J_i - B_{ik} = J_i - B_{ki}$.

В определенном смысле все соотношения теории угловых моментов могут быть переведены на язык производящих инвариантов. Из k спиноров группы SU_2 можно составить производящие инварианты для коэффициентов Вигнера k-го ранга. Инварианты

$$[u_1u_2]^{R_{13}} [u_1u_3]^{R_{12}} [u_2u_3]^{R_{11}} \tag{1.68}$$

соответствуют обычному коэффициенту Вигнера ($k = 3$). Инварианты

$$[u_1u_2]^{A_{12}} [u_1u_3]^{A_{13}} [u_1u_4]^{A_{14}} [u_2u_3]^{A_{23}} [u_2u_4]^{A_{24}} [u_3u_4]^{A_{34}} \tag{1.69}$$

соответствуют коэффициентам Вигнера четвертого ранга. Однако при операциях с производящими инвариантами следует иметь в виду, что не все они линейно-независимы [51]. Так, например, из тождества

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix} = 0 \tag{1.70}$$

следует соотношение между детерминантами второго порядка

$$[x_1x_2]\,[x_3x_4] + [x_3x_1]\,[x_2x_4] + [x_1x_4]\,[x_2x_3] = 0, \qquad x_i = \{x_i, y_i\}. \tag{1.71}$$

Поэтому в отличие от коэффициентов Вигнера третьего ранга коэффициенты Вигнера четвертого ранга неоднозначны и зависят от выбора независимых инвариантов (другими словами, способа связи угловых моментов).

Рассмотрим следующие два способа построения производящих инвариантов:

$$\sum_{m_i} \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 & j_4 - m_4 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 & j_4 + m_4 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \left[\frac{\prod\limits_i (2j_i)!}{\prod\limits_i (j_i - m_i)!\,(j_i + m_i)!} \right] \prod_i x_i^{(j_i - m_i)}\, y_i^{(j_i + m_i)}, \tag{1.72}$$

$$\sum_{m_i,\, R'_{23},\, R''_{23},\, R'_{33},\, R''_{33}} \begin{Vmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & R'_{23} \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & R'_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R''_{11} & R''_{12} & R''_{13} \\ j_3 - m_3 & j_4 - m_4 & R''_{23} \\ j_3 + m_3 & j_4 + m_4 & R''_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R'_{23} & R''_{23} \\ R'_{33} & R''_{33} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \left[\frac{\prod\limits_i (2j_i)!}{\prod\limits_i (j_i - m_i)!\,(j_i + m_i)!} \right]^{1/2} \prod_i x_i^{(j_i - m_i)}\, y_i^{(j_i + m_i)}. \quad (1.73)$$

Способ связи в формуле (1.72) можно назвать симметрическим, в формуле (1.73) — последовательным. Матрица преобразования от способа (1.72) к (1.73) имеет вид (ср. с формулой (1.65))

$$\sum \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ R'_{21} & R'_{22} & R'_{23} \\ R'_{31} & R'_{32} & R'_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R''_{11} & R''_{12} & R''_{13} \\ R''_{21} & R''_{22} & R''_{23} \\ R''_{31} & R''_{32} & R''_{33} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} R'_{23} & R''_{23} \\ R'_{33} & R''_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{31} & R'_{21} \\ R_{41} & R'_{31} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{32} & R'_{22} \\ R_{42} & R'_{32} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{33} & R''_{22} \\ R_{43} & R''_{32} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{34} & R''_{23} \\ R_{44} & R''_{33} \end{Vmatrix} \quad (1.74)$$

В частных случаях, например (1.45), такая матрица тривиальна. Возможность различных способов построения производящих инвариантов обусловлена соотношениями типа (1.71), т. е. фактически тем, что кронекеровское произведение неприводимых представлений $D_{j_1} \times D_{j_2} \times D_{j_3}$ может содержать несколько одинаковых представлений D_j. Оператор, различающий базисные функции кратных представлений, не содержится в группе SU_2 и должен быть задан дополнительно, например указанием способа связи угловых моментов. Отметим, что производящий инвариант для любого способа связи всегда может быть записан в виде линейной комбинации величин типа (1.69); например, коэффициенту Вигнера пятого ранга для $((j_1 j_2)\, j_{12} j_3)\, j_{123} j_4 j$-связи соответствует линейная комбинация величин (подробно см. [21])

$$[uv]^{\beta_{12}} [uw]^{\beta_{13}}]vw]^{\beta_{23}} [ut]^{\beta_{14}} [vt]^{\beta_{24}} [us]^{\beta_{15}} [vs]^{\beta_{25}} [wt]^{\beta_{34}} [ws]^{\beta_{35}} [st]^{\beta_{45}}.$$

Разлагая инвариант I_A, соответствующий способу связи A, по инвариантам I_B, соответствующим способу связи B, имеем

$$I_A = \sum_B C_{A,\,B} I_B. \quad (1.75)$$

Используя разложение инвариантов по степеням компонент составляющих их спиноров, получаем, что $C_{A,B}$ — это j-символы, т. е. j-символы являются коэффициентами разложения полной системы ортонормированных производящих инвариантов, соответствующих одной схеме связи моментов, по полной системе производящих инвариантов, соответствующих другой схеме связи. Таким образом, теория угловых моментов может быть переведена на язык производящих инвариантов.

В целом теория $n \times n$-символов создает большое число новых форм, соединений, соотношений, которые в дальнейшем смогут представить существенный практический интерес.

§ 5. Коэффициенты Клебша — Гордана, конечные разности и комбинаторика

Кратко рассмотрим взаимосвязь коэффициентов КГ с исчислением конечных разностей и комбинаторным анализом. Исчисление конечных разностей связано с общей задачей интерполяции решений (в теории аналити-

ческих функций с задачей восстановления целой функции по дискретным точкам). Напомним основные определения этого исчисления [97, 98]:

1. Обобщенная степень (аналог обычной степени)

$$x^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-n)!}, & x \geqslant n, \\ 0, & x < n; \end{cases} \tag{1.76}$$

ее свойства:

$$x^{(n)} = x^{(m)}(x-m)^{(n-m)}, \tag{1.77}$$

$$(x+1)^{(n)} = (x+1)x^{(n-1)}. \tag{1.78}$$

2. Конечные разности (аналог производных):

$$\begin{aligned} &\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \\ &\Delta_h^{(2)} f(x) = \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta_h^{(n)} f(x) = \sum_{k=0}^{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh). \end{aligned} \tag{1.79}$$

3. Действия с обобщенными степенями (аналоги дифференцирования и интегрирования):

$$\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}, \tag{1.80}$$

$$\sum_{x=0}^{n} x^{(k)} = \frac{(n+1)^{(k+1)}}{(k+1)}. \tag{1.81}$$

В теории конечных разностей сохраняются основные свойства рассматриваемых аналогов.

Ансари [46—48] показал, что численное значение коэффициентов КГ тесно связано с исчислением конечных разностей и определяется разложением квазибинома

$$((ax-by))^{(n)} = \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \binom{n}{\alpha} a^{(n-\alpha)} x^{(n-\alpha)} b^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \tag{1.82}$$

согласно равенству

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta\gamma \\ \alpha'\beta'\gamma' \\ \alpha''\beta''\gamma'' \end{vmatrix} = N' \frac{(\alpha'!)^{1/2}}{\alpha!} \left[\frac{\alpha''^{(\alpha''-\gamma')}}{\beta'^{(\alpha''-\gamma')}} \beta^{(\alpha''-\beta')} \gamma^{(\alpha''-\gamma')} \right]^{1/2} ((\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'))^{(\alpha)}, \tag{1.83}$$

где квадратная матрица имеет смысл символа Редже, N' — нормировочный множитель.

Другое соотношение, связывающее коэффициенты КГ с разностными величинами, рассмотрено в [99]. Величина

$$\widetilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu, k) = (-1)^s \frac{\Delta^s}{(\Delta\mu)^s} [(k-\mu)_{\mu}^{(s+\alpha)} (k+\mu)_{\mu}^{(s+\beta)}] \tag{1.84}$$

является разностным аналогом полиномов Якоби. Коэффициенты КГ выражаются через нее по формуле

$$(l_1 l_2 m_1 m_2 | lm) = \delta_{m, m_1+m_2} \sqrt{\frac{(l_1+l-l_2)!\,(l_2+l-l_1)!\,(l_1+l_2-l)!\,(2l+1)}{(l_1+l_2+l+1)}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l_1-m_1)!\,(l_1+m_1)!\,(l_2-m_2)!\,(l_2+m_2)!}}\, \widetilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu, k), \tag{1.85}$$

где

$$k = \frac{l_1 + l_2 + l}{2}, \qquad \mu = \frac{l_1 + l_2 - l}{2} + m_1, \qquad s = l - l_1 + l_2,$$

$$\alpha = (l_1 - m_1) - (l + m), \qquad \beta = (l_1 + m_1) - (l + m).$$

Оба приведенных результата (1.83) и (1.85) тесно связаны с исчислением конечных разностей. Из них можно вывести ряд следствий и обобщений. Например, записывая формулу (1.85) в симметричной форме Редже

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} = (-1)^{R_{12}-R_{23}} \sqrt{\frac{R_{11}!\, R_{12}!\, R_{13}!\, R_{23}!\, R_{33}!}{(J+1)\, R_{21}!\, R_{22}!\, R_{31}!\, R_{32}!}} \times$$

$$\times\, \tilde{T}_{R_{21}}^{R_{21}-R_{33}\;\; R_{31}-R_{33}} \left(\frac{J}{2}, \frac{J}{2} - R_{21}\right), \quad (1.86)$$

получаем новые соотношения между аналогами полиномов Якоби. Эти соотношения могут быть перенесены на сами полиномы (см. также гл. III).

Отметим, что наряду с разложением квазидетерминанта (в обобщенной степени) второго порядка можно рассматривать квазидетерминантные разложения более высоких порядков, которые можно определить через $n \times n$-символы. В отличие от разложений типа (1.2) они являются определенными численными значениями, суммами. Если соединения коэффициентов КГ представлялись коэффициентами разложения производящих инвариантов, то здесь они задаются непосредственно соединениями квазидетерминантов.

В целом следует подчеркнуть, что ряд основных соотношений теории конечных разностей может рассматриваться как соединение коэффициентов КГ. Приближенные вычисления, аппроксимации также могут рассматриваться на языке коэффициентов КГ. Эти вопросы требуют дальнейшего тщательного исследования. Отметим лишь, что, очевидно, к коэффициентам КГ могут быть применены аналоги дифференцирования и интегрирования (соответствующие конечные разности и суммирования). Такие формулы и соотношения, являясь дискретным аналогом, могут служить прямым прообразом для построения коэффициентов КГ некомпактных групп.

Перейдем к рассмотрению взаимосвязи комбинаторного анализа [100—102] и коэффициентов КГ. В основе и того и другого лежат соотношения между суммами произведений биномиальных коэффициентов, факториалов. Целый ряд соотношений комбинаторного анализа может быть переведен на язык коэффициентов КГ, например:

$$\sum_s \frac{1}{s!\,(b-s)!\,(c-s)!\,(a-b-c+s)!} = \frac{a!}{b!\,c!\,(a-b)!\,(a-c)!}, \quad (1.87)$$

$$\sum_s \frac{(a-s)!\,(b+s)!}{s!\,(c-s)!} = \frac{(a-c)!\,b!\,(a+b+1)!}{c!\,(a+b-c+1)!}. \quad (1.88)$$

Равенство (1.87) называют также формулой Вандермонда и записывают в виде

$$\binom{x+y}{n} = \sum_\alpha \binom{x}{n-\alpha}\binom{y}{\alpha} \quad (1.89)$$

Соотношения (1.87) и (1.88) были использованы в работах [41, 46] для сведения друг к другу различных выражений коэффициентов КГ. Они могут

быть записаны соответственно в виде:

$$\sum_{m_1+m_2=m} (j_1 j_2 m_1 m_2 \,|\, j_1 + j_2 m) = 1, \tag{1.90}$$

$$\sum_{m-m_1=m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 \,|\, j_1 + j_2 m) = \frac{2j+1}{2j_2+1}. \tag{1.91}$$

Переход между формулами (1.87) и (1.88) есть просто симметрия коэффициентов КГ. Можно записать и другие комбинаторные формулы через коэффициенты КГ.

Укажем на связь между коэффициентами КГ и числами Фибоначчи, имеющими ряд интересных теоретико-числовых и проективных свойств [103]. Числа Фибоначчи определяются равенствами:

$$u_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n-i}{i}, \quad u_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n+1-i}{i}. \tag{1.92}$$

Произведение двух чисел Фибоначчи дается формулой

$$u_{2j_1} u_{2j_2} = \sum_{m_1 m_2} \left(\frac{1}{3}(j_1+m_1) \frac{1}{3}(j_2+m_2) m_1 m_2 \,\middle|\, \frac{1}{3}(j_1+j_2+m) m \right) \times \\ \times \binom{j_1+j_2}{j_1+j_2-m}. \tag{1.93}$$

Произведение трех чисел Фибоначчи записывается через соединение двух таких коэффициентов КГ и т. д.

Отметим, как иллюстрацию к § 1 настоящей главы, что здесь в аргумент момента входит проекция m.

Для сопоставления с комбинаторикой полезно также рассмотрение преобразованных 2×2-символов. В отличие от обычных 2×2-символов

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{Vmatrix} = \frac{(-1)^{R_{12}}}{((J+1)!)^{1/2}} \delta_{R_{11} R_{22}} \delta_{R_{21} R_{12}} \tag{1.94}$$

определим преобразованный 2×2-символ разложением [4]

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^J = \sum_{R_{ik}} \left\langle \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \right\rangle u_1^{R_{11}} u_2^{R_{12}} v_1^{R_{21}} v_2^{R_{22}}. \tag{1.95}$$

Свойства этих символов получаются из соответствующих свойств детерминантов согласно методу § 1 этой главы. Так, формулы Вандермонда (1.87) имеют в этих обозначениях вид

$$\sum_{m_1+m_2=m} \left\langle \begin{vmatrix} j_2+m_2 & j_2-m_2 \\ j_2-m_2 & j_2+m_2 \end{vmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{vmatrix} j_1+m_1 & j_1-m_1 \\ j_1-m_1 & j_1+m_1 \end{vmatrix} \right\rangle = \\ = \left\langle \begin{vmatrix} j_1+j_2+m & j_1+j_2-m \\ j_1+j_2-m & j_1+j_2+m \end{vmatrix} \right\rangle. \tag{1.96}$$

---

[4] Для разложения произвольного детерминанта $|u_{ik}|$ символ $\langle |R_{ik}| \rangle$ является коэффициентом при $\prod_{R_{ik}} u_{ik}^{R_{ik}}$. В отличие от $\|R_{ik}\|$ никаких дополнительных численных множителей в разложении не содержится.

Особый интерес представляет рассмотрение различных соединений этих символов как соединений одного ранга:

$$\sum_{R_{12}} \left\langle \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{vmatrix} R'_{11} & R_{12} \\ R'_{21} & R'_{22} \end{vmatrix} \right\rangle, \tag{1.97}$$

$$\sum_{R_{12},\, R_{22},\, R'_{22}} \left\langle \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{vmatrix} R'_{11} & R_{12} \\ R'_{21} & R'_{22} \end{vmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{vmatrix} R_{22} & R'_{22} \\ R'_{21} & R'_{22} \end{vmatrix} \right\rangle, \tag{1.98}$$

так и соединений символов различного ранга

$$\left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| \left\langle \begin{vmatrix} R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix} \right\rangle, \tag{1.99}$$

$$\left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| \left\langle \begin{vmatrix} R_{11} & R'_{12} \\ R_{21} & R'_{22} \end{vmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{vmatrix} R_{22} & R'_{12} \\ R_{32} & R'_{22} \end{vmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{vmatrix} R_{13} & R'_{22} \\ R_{33} & R'_{22} \end{vmatrix} \right\rangle, \tag{1.100}$$

а также замкнутых соединений этих символов. Все эти вопросы несомненно требуют дальнейшего анализа. Отметим здесь, что соединение (1.99 соответствует при $R_{13} = 0$ произведению двух чисел Фибоначчи, (1.99) с обычными 2×2-символами — формуле Вандермонда, а (1.100) с обычными 2×2-символами — 3×3-символу типа

$$\left\| \begin{matrix} (\ldots + \varkappa) & (\ldots) & (\ldots - \varkappa) \\ (\ldots - \varkappa) & (\ldots + \varkappa) & (\ldots) \\ (\ldots) & (\ldots - \varkappa) & (\ldots + \varkappa) \end{matrix} \right\| \tag{1.101}$$

Из проведенного рассмотрения видно, что связь теории коэффициентов КГ как с комбинаторикой, так и с исчислением конечных разностей является достаточно глубокой. При этом основным тезисом этого параграфа является не возможность использования комбинаторики и конечных разностей в теории коэффициентов КГ, а обратная задача — возможность использования в указанных теориях языка коэффициентов КГ.

ГЛАВА II

СОЕДИНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В данной главе обсуждаются вопросы, связанные с анализом и непосредственным обобщением обычных соединений коэффициентов КГ. Выясняется структура теории и строятся новые типы соединений. Особое внимание уделено предлагаемому в этой главе топологическому подходу к теории угловых моментов.

§ 1. О структуре трансформационных матриц

Как уже указывалось во введении, теория трансформационных матриц имеет широкую область применения в физике. Однако существующая формулировка этой теории имеет определенные недостатки: нет стандартности как в обозначениях j-символов, так и в записи их формул суммирования; ряд соотношений (см., например, [104]) не вытекает из общих правил, не учитываются ни симметрия Редже [37], ни ее следствия [1].

Обычные соединения коэффициентов КГ строятся с помощью ковариантного суммирования по общим значениям m. Так, j-символы являются суммой произведений коэффициентов Вигнера, просуммированных по всем значениям m. При замене в j-символах коэффициентов Вигнера согласно (1.1) на 3×3-символы в последних остаются свободными только первые строки (или триады $j_1 j_2 j_3$). Как видно из правил действий над трансформационными матрицами (см. § 2 введения), любое суммирование эквивалентно суммированию по всей строке 3×3-символа.

Все допустимые инвариантные суммирования в классической теории угловых моментов фактически сводятся к суммированию по двум элементам столбца (строки) или по полной строке (столбец). Первый случай (будем называть его *диадным*) соответствует суммированию по проекциям моментов m, второй (будем называть его *триадным*) — суммированию по триаде моментов. Чтобы более четко выделить триадный характер суммирования, введем обозначение

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Vmatrix} j_1 & j_1 & j_3 & j_3 \\ j_2 & j & j & j_2 \\ j_{12} & j_{23} & j_{12} & j_{23} \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

Для сравнения запишем 3×4-символ в триадной форме (отличать от записи (1.5))

$$\begin{Vmatrix} j_2 + j_{12} - j_1 & j + j_{23} - j_1 & j + j_{12} - j_3 & j_2 + j_{23} - j_3 \\ j_{12} + j_1 - j_2 & j_1 + j_{23} - j & j_{12} + j_3 - j & j_{23} + j_3 - j_2 \\ j_1 + j_2 - j_{12} & j + j_1 - j_{23} & j_3 + j - j_{12} & j_2 + j_3 - j_{23} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_4 & x_1 + y_2 & x_1 + y_3 \\ x_2 + y_2 & x_2 + y_3 & x_2 + y_1 & x_2 + y_4 \\ x_3 + y_3 & x_3 + y_2 & x_3 + y_4 & x_3 + y_1 \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

При такой системе обозначений можно рассматривать формулировку теории угловых моментов как в обычных переменных jm, так и через R-символы Редже (переход к (2.2) очевиден). Обозначения (2.1) пригодны и в том, и в другом случае. Общее правило размещения аргументов в произвольной трансформационной матрице: все j, принадлежащие к одной триаде, размещаются в одном столбце; одинаковые j — в одной строке. Например, $9j$-символ может быть записан в виде

$$\begin{Vmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} j_1 & j_{34} & j_{34} & j_1 & j_{24} & j_{24} \\ j_2 & j_3 & j & j_3 & j_2 & j \\ j_{12} & j_4 & j_{12} & j_{13} & j_4 & j_{13} \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

Любой j-символ задается подобной таблицей индексов. Хотя по сравнению с обычной трактовкой число аргументов увеличивается вдвое, но формулы упрощаются, поскольку j-символы записываются единым образом. При этом аргументами являются полные триады, по возможным значениям которых производится суммирование.

Если даны конкретные значения моментов, то наряду с таблицами типа (2.1), (2.3), где стоят эти конкретные значения, нужно задать символически записанную схему зацеплений. Например, (2.1) и (2.3) соответствуют следующие схемы:

$$\begin{Vmatrix} (14) & (23) \\ (13) & (24) \\ (12) & (34) \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} (14) & (23) & (56) \\ (15) & (24) & (36) \\ (13) & (25) & (46) \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

Эта запись указывает, в каких триадах лежат общие моменты j. Рассмотренная форма не только является единой для всех j-символов, но и удобна при их перемножении. При перемножении j-символов в форме (2.1), (2.3) одинаковые триады, по которым происходит суммирование, выбрасываются, а два символа объединяются в один с соответствующей группировкой по триадам.

Рассмотрим в качестве примеров суммы произведений двух $6j$-символов:

$$\sum_{(j_1j_2j_3)} \begin{Vmatrix} j_1 & l_1 & j_1 & l_1 \\ j_2 & l_2 & l_2 & j_2 \\ j_3 & j_3 & l_3 & l_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_1 & k_1 & j_1 & k_1 \\ j_2 & k_2 & k_2 & j_2 \\ j_3 & j_3 & k_3 & k_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} l_1 & j_1 & l_1 & k_1 & j_1 & k_1 \\ l_2 & l_2 & j_2 & k_1 & k_2 & j_2 \\ j_3 & l_3 & l_3 & j_3 & k_3 & k_3 \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

$$\sum_{\substack{(j_1j_2x) \\ (l_1l_2x)}} (2x+1)(-1)^x \begin{Vmatrix} j_1 & l_1 & l_1 & j_1 \\ j_2 & l_2 & j_2 & l_2 \\ x & x & l_3 & l_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_1 & l_1 & l_1 & j_1 \\ j_2 & l_2 & j_2 & l_2 \\ x & x & j_3 & j_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} l_1 & j_1 & l_1 & j_1 \\ j_2 & l_2 & j_2 & l_2 \\ l_3 & l_3 & j_3 & j_3 \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

$$\sum_{\substack{(j_1j_2x) \\ (l_1l_2x)}} (2x+1) \begin{Vmatrix} j_1 & l_1 & j_1 & l_1 \\ j_2 & l_2 & l_2 & j_2 \\ x & x & l_3 & l_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_1 & l_2 & j_1 & l_2 \\ j_2 & l_1 & l_1 & j_2 \\ x & x & j_3 & j_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} j_1 & j_2 & j_1 & j_2 \\ l_2 & l_1 & l_1 & l_2 \\ l_3 & l_3 & j_3 & j_3 \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

В случае (2.5) общей является одна триада, в случаях (2.6) и (2.7) — две. Результат зависит от способа соединения триад. При суммировании в (2.5), (2.6) общие триады выбрасываются, а остающиеся объединяются вместе. В случае (2.7) требуется перегруппировка моментов j внутри триад.

Суммирование более сложных выражений аналогично. Например, для суммы произведений трех $6j$-символов имеем:

$$\sum_{\substack{(j_1j_2x) \\ (l_1l_2x) \\ (k_1k_2x)}} (2x+1)(-1)^{R-x} \begin{Vmatrix} j_1 & l_1 & j_1 & l_1 \\ j_2 & l_2 & l_2 & j_2 \\ x & x & k_3 & k_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_1 & k_1 & j_1 & k_1 \\ j_2 & k_2 & k_2 & j_2 \\ x & x & l_3 & l_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} l_1 & k_2 & l_1 & k_2 \\ l_2 & k_1 & k_1 & l_2 \\ x & x & j_3 & j_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} j_1 & j_1 & j_3 & j_2 & j_2 & j_3 \\ k_3 & k_2 & k_2 & k_3 & k_1 & k_1 \\ l_2 & l_3 & l_2 & l_1 & l_3 & l_1 \end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

$$\sum_{\substack{(j_1j_2x) \\ (l_1l_2x) \\ (k_1k_2x)}} (2x+1)(-1)^{2x} \begin{Vmatrix} j_1 & l_1 & j_1 & l_1 \\ j_2 & l_2 & l_2 & j_2 \\ x & x & k_3 & k_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_1 & k_1 & j_1 & k_1 \\ j_2 & k_2 & k_2 & j_2 \\ x & x & l_3 & l_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} l_1 & k_1 & l_1 & k_1 \\ l_2 & k_2 & k_2 & l_2 \\ x & x & j_3 & j_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} j_1 & l_1 & j_1 & k_1 & l_1 & k_1 \\ l_2 & j_2 & k_2 & j_2 & k_2 & l_2 \\ k_3 & k_3 & l_3 & l_3 & j_3 & j_3 \end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

Суммирование производится по общим триадам, $R = \sum_{i=1}^{3} (l_i + k_i + j_i)$. Метрика суммирования по триадам определяется во всех случаях переходом от трансформационных матриц к форме, где все j — равноправны, т. е. к соединению коэффициентов Вигнера. Симметрия j-символов ясна из их построения; всегда можно, в частности, переставлять строки (3! соотношений симметрии). Формулы для численных значений могут быть построены с помощью (1.56).

В работах [104, 105] исследовались трансформационные матрицы, реализующие сложение одинаковых моментов. Они осуществляют представ-

ление группы перестановок. Были найдены соотношения между j-символами, не вытекающие из обычных правил суммирования. Например [104]:

$$\sum_x (-1)^{2j} (2x+1) \begin{vmatrix} j & j & x \\ j & j & x \end{vmatrix} = \chi_{jj}^{(12)}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{xy} (-1)^{2j+x} (2x+1)(2y+1) \begin{vmatrix} j & x & j \\ x & j & y \\ j & y & J \end{vmatrix} = \chi_{jJ}^{(3)}, \tag{2.11}$$

где $\chi_{jj}^{(12)}$, $\chi_{jJ}^{(3)}$ — простые функции j и J (характеры представления группы перестановок). Будучи нестандартными для [34], эти соотношения, переписанные в триадной форме, органически входят в схему данного параграфа.

В работе [7] были рассмотрены графические методы для теории трансформационных матриц, представляющие конкретные реализации редукции графических методов (ср. рис. 8). Формулы типа (2.10), (2.11), не представимые на графиках [34], могут быть представлены на общих графиках § 3 гл. I. Например, формула (2.10) при изображении $6j$-символа в виде четырех линий, исходящих из одной точки, получается графическим соединением двух линий. Из рассмотренной структуры трансформационных матриц следуют два аспекта: один из них связан с использованием симметрии Редже для получения новых нестандартных формул, другой — с более детальным изучением j-символов с помощью топологических методов, вытекающих из структуры теории.

§ 2. «Нестандартные» соединения

При обычном конструировании соединений коэффициентов КГ фактически имеются два типа инвариантного суммирования, отмеченные в предыдущем параграфе: диадный и триадный. В принципе соединения коэффициентов Вигнера можно строить любым набором инвариантных суммирований обоих типов, т. е. с помощью суммирований по целым строкам (столбцам) или по двум элементам строк (столбцов) символов Редже. Частным случаем такого построения, как известно, являются jm- и j-символы. Другие соединения обычно считаются нестандартными. Возможно, такое положение является своеобразным следствием стройности и законченности методов Рака. На самом деле как обычные соединения, так и соединения, которые будут выписаны ниже, являются вполне стандартными с точки зрения использования двух суммирований, принятых в теории угловых моментов (с этим и связаны кавычки в заголовке параграфа). Существует несколько возможностей получения «нестандартных» соединений. Первая возможность связана с использованием симметрии Редже, т. е. с заменой проекций m определенными комбинациями моментов j и обратно. Так можно рассматривать соединения вида:

$$(j_1 j_2 \nu_1 \nu_2 \,|\, j\nu)(T_1 T_2 t_1 t_2 \,|\, Tt), \tag{2.12}$$

где

$$j_1 + \nu_1 = -T_1 + T_2 + T, \qquad j_2 + \nu_2 = T_1 - T_2 + T;$$

$$(j_1' j_2' \nu_1' \nu_2' \,|\, j'\nu')(j_1 j_2 \nu_1 \nu_2 \,|\, j\nu)(T_1 T_2 t_1 t_2 \,|\, Tt), \tag{2.13}$$

где

$$j_1' + \nu_1' = -j_1 + j_2 + j, \qquad j_2' + \nu_2' = j_1 - j_2 + j,$$
$$j_1 + \nu_1 = -T_1 + T_2 - T, \qquad j_2 + \nu_2 = T_1 - T_2 + T,$$

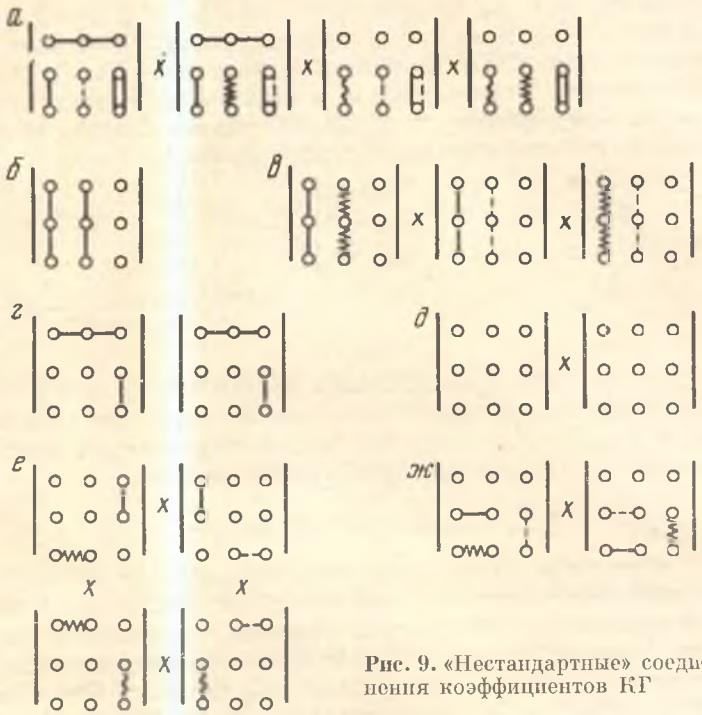


Рис. 9. «Нестандартные» соединения коэффициентов КГ

получаемые из обычных обобщенных коэффициентов КГ с помощью симметрии Редже. Как будет показано в § 1 гл. IV, соединения такого типа играют фундаментальную роль в теории коэффициентов КГ групп SU_n.

Подчеркнем полную равноправность всех R_{ik}, входящих в 3×3-символ. Поэтому для суммирования (построения соединений) можно выбрать любые элементы R_{ik}. Например, наряду с обычным суммированием символов Редже, производившимся по R_{21}, R_{31}; R_{22}, R_{32}; R_{23}, R_{33}; R_{11}, R_{12}, R_{13}, можно рассматривать инвариантные формулы, полученные суммированием по R_{11}, R_{12}, R_{13}; R_{21}, R_{22}, R_{23} или по R_{21}, R_{31}; R_{22}, R_{23}; R_{32}, R_{33}. На рис. 9 приведены как примеры в наглядном виде некоторые соединения 3×3-символов: *а* — формула (2.10); *б*, *в* — случаи чисто триадного суммирования, *г*, *д* — случаи смешанного суммирования, первый из них — обычное соотношение ортогональности; *е*, *ж* — новые способы чисто диадных соединений. Интересным представляется и соединение вида

$$\sum \begin{Vmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{11} & R'_{21} \\ R_{12} & R'_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{22} & R'_{21} \\ R_{23} & R_{2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{31} & R_{2} \\ R_{33} & R'_{22} \end{Vmatrix} \tag{2.14}$$

Остановимся подробнее на чисто триадных соединениях (типа *в*). Коэффициентами преобразования в этих соединениях служат суммы коэффициентов Рака (3×4-символов) частного вида. Простой аналог коэффициента Рака (все правила трансформационных матриц распространяются и на чисто триадные соединения) имеет вид

$$\sum \begin{Vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 & x_3 \end{Vmatrix} \tag{2.15}$$

Сумма берется по обоим парам свободных концов (замкнутые графики типа рис. 8, *д*). Все формулы для подобных графиков получаются из обычных

j-символов, дополнительным образом просуммированных. Причем в результате дополнительных равенств получаются суммы j-символов частного вида. Например, при преобразовании с помощью (2.15) показатель всех четырех символов Редже равен J, выполняются равенства $j_{12} = j_{23}$, $j_2 = j$, $j_1 = j_3$. Соединения типа (2.14) также могут представлять интерес. Приведем соответствующее соотношение

$$\sum_{\varkappa} (-1)^{R_{12}} \left\langle \begin{vmatrix} R_{11}+\varkappa & R_{22}-\varkappa & R_{13} \\ R_{21} & R_{22}+\varkappa & R_{23}-\varkappa \\ R_{31}-\varkappa & R_{32} & R_{33}+\varkappa \end{vmatrix} \right\rangle = (-1)^{R_{11}} \frac{J!}{R_{13}!\, R_{23}!\, (J-R_{13})!\, (J-R_{23})!} \tag{2.16}$$

Здесь были кратко рассмотрены способы соединения, фактически содержащиеся в обычной теории (принципиально новые способы связи были уже рассмотрены в гл. I). Последовательная систематизация всех нестандартных соединений требует дополнительного анализа.

§ 3. Топологический подход

В данном параграфе рассматриваются возможности перевода основных понятий теории угловых моментов на язык многомерной геометрии и применение топологических методов. Отметим, что вопросы геометризации физических понятий и возникающие при этом топологические аспекты вызывают за последние годы определенный интерес. Это относится к теории гравитации [106—108], к теории твердого тела [109, 110], к теории молекул [111], статистической физике [112], теории электрических полей [113], теории групп Ли [51] (число независимых дифференциалов группы Ли определяется числами Бетти соответствующих полиномов Пуанкаре). Однако особое внимание привлекли работы по применению топологического аппарата в теории поля (см. [114]). В работах [115, 116] удалось для исследования особенностей фейнмановских интегралов вместо сложного анализа структуры римановой поверхности использовать чисто алгебраический подход. Весьма эффективны топологические методы и в теории угловых моментов [14, 17]. Различные соединения коэффициентов КГ характеризуются своими топологическими инвариантами — группами Бетти. Кратко напомним основные топологические понятия [117—119].

Алгебраическая топология изучает многомерные геометрические образования, разбивая их на простейшие элементы — симплексы, правильно примыкающие друг к другу. Симплексы — это элементарные «кирпичи», из которых строятся сложные геометрические фигуры — полиэдры (схема разбиения полиэдров на симплексы называется комплексом). Отрезок, треугольник и тетраэдр являются симплексами одно-, дву- и трехмерного пространства. Каждому полиэдру соответствует топологический инвариант — группы Бетти, получаемый с помощью разбиения полиэдра на симплексы. Основное преимущество в топологическом подходе заключается в возможности характеризовать структуру любых сложных полиэдров выбором нескольких величин — чисел Бетти. Из соответствия между полиэдрами и соединениями коэффициентов КГ и Рака вытекает возможность использования топологических инвариантов для характеристики этих соединений. Приведем конкретные определения.

r-мерным симплексом A^r называется множество точек $\{z\}$ вида

$$z = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \ldots + \lambda^r a_r, \tag{2.17}$$

где λ^i — действительные числа, удовлетворяющие условиям:

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \ldots + \lambda^r = 1, \quad \lambda^i \geqslant 0. \tag{2.18}$$

С помощью вершин $a_0a_1\ldots a_r$ симплекс A^r можно записать в символическом виде

$$A^r = (a_0a_1\ldots a_r). \tag{2.19}$$

Величины $(a_0a_1\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_r)$ называются $(r-1)$-гранями симплекса A^r. Конечная совокупность симплексов образует комплекс K, если наряду с каждым симплексом в K входит его грань и каждые два симплекса совокупности K расположены правильно (не пересекаются вовсе или пересечение является гранью каждого из симплексов). Множество всех точек, принадлежащих симплексам комплекса K, называется полиэдром $|K|$. Изучение полиэдра, в первую очередь, заключается в отыскании его топологических инвариантов. Такими инвариантами являются группы гомологий (группы Бетти). Они строятся следующим образом. Вводится понятие цепи

$$x = \sum_i g^i A_i^s, \tag{2.20}$$

где g^i — целые числа, A_i^s — совокупность всех s-мерных симплексов комплекса K.

Соответствующая совокупность всех $(r-1)$-мерных граней симплексов A называется границей цепи Δx:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta A_i^r. \tag{2.21}$$

Граница симплекса ΔA^r находится согласно символической формуле

$$\Delta A^r = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial A^r}{\partial a^i}. \tag{2.22}$$

r-Мерная цепь называется циклом, если ее граница равна нулю. Множество циклов составляет группу Z^r. Цикл гомологичен нулю, если он является границей $(r+1)$-мерной цепи из K. Эти циклы образуют группу H^r. Группы гомологий (группы Бетти) определяются фактор-группами $B^r = Z^r/H^r$. Они коммутативны и могут быть заданы своими инвариантами — числами Бетти p_r и коэффициентами кручения t_q.

Чтобы применить топологические понятия к теории угловых моментов, необходимо сопоставить величинам этой теории (моментам, коэффициентам КГ, Рака и т. д.) геометрические объекты в многомерных пространствах — полиэдры. В согласии с интерпретацией § 3 гл. I будем считать треугольник со сторонами, соответствующими моментам, геометрическим образом коэффициента Вигнера. Тогда образом $6j$-символа является тетраэдр с четырьмя гранями — коэффициентами КГ. Эта трактовка соответствует также геометрической интерпретации коэффициентов КГ и Рака в классическом пределе, предложенной в [27] (см. также [44]). Отрезок прямой, треугольник, тетраэдр — это симплексы одно-, дву- и трехмерного пространства. Следовательно, любому соединению коэффициентов КГ, j-символам можно поставить в соответствие определенный полиэдр $|K|$, построенный из указанных симплексов. При этом для комплекса K, согласно структуре теории угловых моментов, условия правильного соединения симплексов выполнены автоматически. Разумеется, графикам обычного типа [34] также могут быть приписаны топологические характеристики. Однако здесь условия композиции— построения комплекса из симплексов — не совпадают с правилами соединения коэффициентов КГ.

Практически нахождение топологических характеристик (чисел Бетти) для полиэдров сводится к непосредственному нахождению всех циклов

данной размерности, циклов, гомологичных нулю и друг другу, или же к использованию формулы Майера — Вьеториса (см. [120]), связывающей числа Бетти комплексов K_1, K_A, K_B, K_0, где $K_A \subset K_1$, $K_B \subset K_1$, $K_0 \subset K_1$, причем $K_A \cup K_B = K_1$, $K_A \cap K_B = K_0$. Для описания конкретных соединений коэффициентов КГ удобно использовать набор комплексов K_s ($s = 0, 1, 2\ldots$ — размерность). Тогда полиэдр в трехмерном случае описывается совокупностью чисел Бетти p_r^s:

$$\begin{matrix} p_0^3 & p_0^2 & p_0^1 & p_0^0 \\ p_1^3 & p_1^2 & p_1^1 & \\ p_2^3 & p_2^2 & & \\ p_3^3 & & & \end{matrix} \tag{2.23}$$

В работе [14], где приведены конкретные примеры топологических характеристик соединений коэффициентов КГ, применялся набор чисел Бетти p_3^3, p_2^2, p_1^1, p_0^0 — 1. Следует отметить, что топологические характеристики отражают только некоторые свойства геометрических образов. Ряд существенных свойств при этом всегда теряется. Рассмотрим примеры соединений коэффициентов КГ.

Для тетраэдра с вершинами $a_0a_1a_2a_3$ цепи имеют вид:

$$\begin{aligned} x^3 &= \tau(a_0a_1a_2a_3), \\ x^2 &= \tau_3(a_0a_1a_3) + \tau_2(a_0a_1a_2) + \tau_1(a_0a_2a_3) + \tau_0(a_1a_2a_3), \\ x^1 &= \tau_{01}(a_2a_3) + \tau_{02}(a_1a_3) + \tau_{03}(a_1a_2) + \tau_{12}(a_0a_3) + \tau_{13}(a_0a_2)\ \tau_{23}(a_0a_1), \\ x^0 &= \tau_0'(a_0) + \tau_1'(a_1) + \tau_2'(a_2) + \tau_3'(a_3). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Используя формулы (2.21) и (2.22), находим числа Бетти согласно формуле (2.23):

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & & & \end{matrix} \tag{2.25}$$

Соединение двух коэффициентов КГ

$$\sum_{m_{12}} (j_1j_2m_1m_2 \mid j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3 \mid jm) \tag{2.26}$$

можно представить в виде двух треугольников на плоскости с одной общей стороной. Числа Бетти в этом случае равны

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \\ 1 & & \end{matrix}$$

Любой обобщенный коэффициент Вигнера (не содержащий истинного суммирования) геометрически может быть представлен в виде определенным образом соединенных треугольников на плоскости. Однако любая замкнутая петля суммирования коэффициентов КГ, например

$$\sum_{m_{12}\, m_{23}\, m_{13}} (j_{13}j_2m_{13}m_2 \mid j_{12}m_{12})(j_{12}j_3m_{12}m_3 \mid j_{23}m_{23})(j_{23}j_4m_{23}m_4 \mid j_{13}m_{13}), \tag{2.27}$$

соответствует полиэдру в трехмерном пространстве, а коэффициентов Рака — полиэдру в четырехмерном пространстве.

С помощью чисел Бетти решается задача классификации 3 nj-символов. Известно, что с ростом n число различных 3 nj-символов резко воз-

растает ($12j$-символов — 2; $21j$-символов — 84; $24j$-символов — 576 и т. д.) В работе [121] с помощью ЭВМ перечислены различные $21j$ — $24j$-символы, причем характеристика их была дана в соответствии с перечислением диагоналей в графиках [34] и не охватывала всех возможных случаев. Согласно рассмотренной выше схеме, каждому из j-символов соответствует своя топологическая характеристика (группы Бетти).

Как обобщение данной схемы можно рассмотреть четырехмерный симплекс $(a_1a_2a_3a_4a_5)$. Обозначая символ, соответствующий в теории угловых моментов четырехмерному симплексу, через $[a_1a_2a_3a_4a_5]$, получаем

$$[a_1a_2a_3a_4a_5] = \sum [a_1a_2a_3a_4]\,[a_1a_2a_3a_5]\,[a_1a_2a_4a_5]\,[a_1a_3a_4a_5]\,[a_2a_3a_4a_5]. \quad (2.28)$$

Эта сумма произведений $6j$-символов, представленная в форме записи [7], имеет вид

$$\sum \begin{Vmatrix} j_{12} & j_{12} & j_{34} & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j_{13} & j_{24} \\ j_{23} & j_{14} & j_{14} & j_{23} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_{12} & j_{12} & j_{35} & j_{35} \\ j_{13} & j_{25} & j_{13} & j_{25} \\ j_{23} & j_{15} & j_{15} & j_{23} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_{12} & j_{12} & j_{45} & j_{45} \\ j_{24} & j_{15} & j_{15} & j_{24} \\ j_{14} & j_{25} & j_{14} & j_{25} \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \begin{Vmatrix} j_{34} & j_{34} & j_{15} & j_{15} \\ j_{13} & j_{45} & j_{13} & j_{45} \\ j_{14} & j_{35} & j_{35} & j_{14} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_{34} & j_{34} & j_{25} & j_{25} \\ j_{24} & j_{35} & j_{24} & j_{35} \\ j_{23} & j_{45} & j_{45} & j_{23} \end{Vmatrix}. \quad (2.29)$$

Суммирование здесь проводится по десяти триадам:

$$\begin{matrix} P_{123} & P_{124} & P_{134} & P_{125} & P_{135} & P_{145} & P_{234} & P_{245} & P_{235} & P_{345} \\ j_{12} & j_{12} & j_{34} & j_{12} & j_{13} & j_{45} & j_{23} & j_{45} & j_{35} & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j_{13} & j_{25} & j_{35} & j_{15} & j_{24} & j_{24} & j_{23} & j_{45} \\ j_{23} & j_{14} & j_{14} & j_{15} & j_{15} & j_{14} & j_{34} & j_{25} & j_{25} & j_{35} \end{matrix} \quad (2.30)$$

Величина (2.29) является симплексом в четырехмерном пространстве, который имеет пять трехмерных граней. Символически (2.29) можно записать в форме

$$\sum |P_{123}P_{124}P_{134}P_{234}|\,|P_{123}P_{125}P_{135}P_{235}|\,|P_{124}P_{125}P_{145}P_{245}|\,|P_{134}P_{245}P_{135}P_{145}| \times$$
$$\times |P_{234}P_{235}P_{245}P_{345}| = \begin{Vmatrix} (123) & (125) & (145) & (345) & (234) \\ (124) & (135) & (245) & (134) & (235) \\ (134) & (235) & (124) & (135) & (245) \\ (234) & (123) & (125) & (145) & (345) \end{Vmatrix} \quad (2.31)$$

Смысл и роль величин теории угловых моментов, соответствующих симплексам, и путь дальнейшего обобщения ясны из сравнения (2.29) с другими симплексами:

$$\begin{Vmatrix} (12) & (12) & (34) & (34) \\ (13) & (24) & (13) & (24) \\ (23) & (14) & (14) & (23) \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} (1) & (3) & (2) \\ (2) & (1) & (3) \end{Vmatrix} \quad (2.32)$$

С помощью символов (2.29) производится переход между различными соединениями 6 j-символов.

Рассмотренный подход является начальным шагом в использовании топологических методов. По-видимому, имеются возможности для расширения их приложений. Так, обобщенная теория угловых моментов включает высшие симметрии. Дифференциальные операторы, характеризующие определенные группы Ли, описываются группами когомологий [51]. Одновременное наличие групп гомологий и когомологий определяет в теории

коэффициентов КГ структуры, требующие для анализа использования современного топологического аппарата [114, 122]. Однако этот круг вопросов детально еще не рассматривался.

§ 4. Топологическая трактовка теории угловых моментов

При исследовании структуры теории угловых моментов уже простая топологически ковариантная трактовка фактически без использования алгебраической топологии приводит к интересным практическим результатам [17]. Она позволяет ввести единую систему обозначений, перечислить и классифицировать j-символы, получать соотношения между ними, не зависящие от конкретных значений моментов. Введем, согласно § 3 этой главы, следующую систему обозначений.

Поставим в соответствие матрице метрики $\begin{pmatrix} j \\ mm' \end{pmatrix}$, которую обозначим X_{12}, одномерный симплекс $[a_1a_2]$; коэффициенту Вигнера $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$, который обозначим X_{123},— двумерный симплекс $[a_1a_2a_3]$; 6 j-символу $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$, который обозначим X_{1234},— трехмерный симплекс $[a_1a_2a_3a_4]$. Тогда конкретным соединениям коэффициентов КГ или Рака [1] соответствуют определенные полиэдры. С помощью $X_{ik\ldots}$ могут быть записаны любые соотношения теории угловых моментов, не зависящие от конкретных значений входящих в них символов. Например:

$$X_{13} = \sum X_{123}X_{12}X_{23}, \tag{2.33}$$

$$X_{123} = \sum X_{12}X_{23}X_{13}, \tag{2.34}$$

$$X_{1234} = \sum X_{123}X_{234}X_{134}X_{124}. \tag{2.35}$$

При таком способе записи суммирование проводится по общим симплексам и специально указывать его не нужно. Поэтому для суммирования можно ввести удобное обозначение, отделяя $X_{ik\ldots}$, входящие в сумму, квадратными скобками. Тогда 6 j-символ можно записать так:

$$X_{1234} = [X_{123}X_{234}X_{134}X_{124}] = \begin{Bmatrix} X_{12}X_{23}X_{13} \\ X_{34}X_{14}X_{24} \end{Bmatrix}, \tag{2.36}$$

2 j-символ в виде

$$[X_{1234}X_{1345}X_{1356}X_{1236}] = \begin{bmatrix} X_{14} & X_{16} & X_{34} & X_{36} \\ X_{45} & X_{24} & X_{56} & X_{26} \\ X_{15} & X_{35} & X_{12} & X_{23} \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

соединение двух коэффициентов Рака — в виде

$$[X_{1234}X_{2345}] = \begin{Bmatrix} X_{12} & X_{23} & X_{13} \\ X_{34} & X_{14} & X_{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{23} & X_{24} & X_{34} \\ X_{45} & X_{35} & X_{25} \end{Bmatrix}. \tag{2.38}$$

В формулах (2.36)—(2.38) справа стоят обычные обозначения этих символов в теории угловых моментов. (Для j-символов более высокого порядка имеется большое число разных обозначений, которые весьма громоздки.) Каждой величине типа (2.36)—(2.38) соответствует определенный полиэдр.

[1] Хотя, строго говоря, употребление терминов — соединение коэффициентов КГ, Рака — правильно в приводимых выше формулах с точностью до фазовых и метрических множителей, оно удобно в смысле наглядности.

Геометрическим образом коэффициента КГ X_{123} является треугольник со сторонами X_{12}, X_{13}, X_{23}; коэффициента Рака X_{1234}— тетраэдр с гранями X_{123}, X_{124}, X_{134}, X_{234}; соединения двух коэффициентов КГ — два треугольника с общей стороной; соединения двух коэффициентов Рака — два тетраэдра с общей гранью. Для анализа любых соединений коэффициентов КГ или Рака и соотношений между ними достаточно рассмотреть соответствующие геометрические образы. Практически весьма удобно использовать графические методы. Графическая техника полностью вытекает из геометрической трактовки и является различной для соединений коэффициентов КГ и Рака.

На рис. 10 приведены графики коэффициента Рака (*а*) и 12 *j*-символа (*б*) как соединений коэффициентов КГ и тех же величин (*в*, *г*) как соединений коэффициентов Рака. В первом случае линии соответствуют X_{ik},

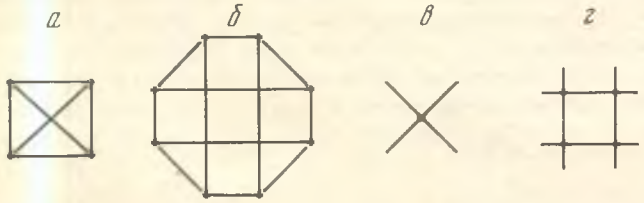


Рис. 10

узлы — коэффициентам КГ, во втором линии соответствуют коэффициентам КГ (X_{ikl}), узлы — коэффициентам Рака. Графики первого типа подробно рассмотрены в [34], второго — введены в [7]. Из рис. 10 видна также взаимосвязь между обоими типами графиков.

Топологический анализ *j*-символов и связанных с ними трансформационных матриц представляет интерес ввиду прикладного значения. Согласно § 2 введения обозначение трансформационных матриц через X_{ik} имеет вид

$$((((X_{36}X_{46})X_{34}X_{24})X_{23}X_{13})X_{12}X_{15}X_{25})\,|\,((((X_{36}X_{13})X_{16}X_{15})X_{56}X_{46})X_{45}X_{24}X_{25}). \tag{2.39}$$

Схема соединений коэффициентов КГ здесь полностью фиксируется. Каждое X_{ikl} соответствует на графиках типа 10, *в*, *г* свободной триадной линии. Если n — число таких линий в трансформационной матрице, то $3\,n/2$ — число моментов в *j*-символе. В случае (2.39) $n = 3$ имеем 12 *j*-символ, который в форме соединения коэффициентов Рака может быть записан так:

$$[X_{1346}X_{1234}X_{1245}X_{1456}]. \tag{2.40}$$

Правила действий с трансформационными матрицами в форме (2.39) тривиальны и сводятся к сокращению повторяющихся X_{ikl}, например,

$$(X_{123}X_{345}X_{134}X_{146}\,|\,X_{126}X_{235}X_{256}X_{456})(X_{123}X_{134}X_{347}X_{148}\,|\,X_{128}X_{237}X_{278}X_{478}) = \\ = (X_{345}X_{146}X_{128}X_{237}X_{278}X_{478}\,|\,X_{126}X_{235}X_{256}X_{456}X_{347}X_{148}). \tag{2.41}$$

Далеко не всякий *j*-символ или трансформационная матрица непосредственно представимы в форме (2.40) или (2.39). Однако в этих случаях мы имеем дело с определенными частными значениями. Так, 9*j*-символ можно рассматривать как 12*j*-символ второго рода, где один из коэффициентов Рака имеет частный вид $\begin{Bmatrix} j' & j'' & j \\ j' & j'' & j \end{Bmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} X_{12} & X_{34} & X_{16} \\ X_{23} & X_{35} & X_{46} \\ X_{13} & X_{34} & X_{14} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} & X_{23} & X_{13} \\ X_{31} & X_{14} & X_{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{54} & X_{35} & X_{31} \\ X_{23} & X_{24} & X_{25} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{16} & X_{46} & X_{14} \\ X_{24} & X_{12} & X_{26} \end{Bmatrix} \times \\ \times \begin{Bmatrix} X_{24} & X_{46} & X_{26} \\ X_{34} & X_{25} & X_{54} \end{Bmatrix}, \tag{2.42}$$

причем $X_{24} = X_{56}$, $X_{46} = X_{25}$, $X_{26} = X_{54}$. С этой точки зрения $9j$-символ является таким же частным случаем, как и коэффициент Рака с двумя равными нулю моментами, коэффициенты КГ с одной из проекций, равной нулю, и т. п. При топологическом подходе частные значения непосредственно не рассматриваются. $9j$-символ имеет важное значение для приложений, и его можно включить в общую схему с помощью следующего обозначения:

$$[X_{1234} X_{2345} X_{1246} Y_{(21)(56)}]. \tag{2.43}$$

Здесь $Y_{(ik)(lm)}$ — частное значение коэффициентов Рака, при котором $X_{ik} = X_{lm}$, $X_{il} = X_{km}$, $X_{kl} = X_{im}$.

Аналогичны обозначения и для других частных символов, подобных $9\,j$-символу. Графически $9\,j$-символ представлен на рис. 11, *а*. Здесь ломаная линия *123* соответствует одному моменту. Графический переход от частных трансформационных матриц к общим матрицам типа (2.43) показан на рис. 11, *б* и *в* на примере $9\,j$-символа. Линии *1* и *2* разрезаются и 11, *б* преобразуется в 11, *в* с одним вырожденным коэффициентом Рака. Эта процедура совершенно аналогична для любых трансформационных матриц. Что же касается места $Y_{(ik)(lm)}$ (положения вырожденного коэффициента Рака) в выражении типа (2.43), то нетрудно сформулировать

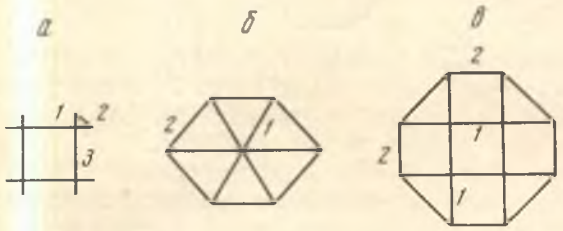


Рис. 11

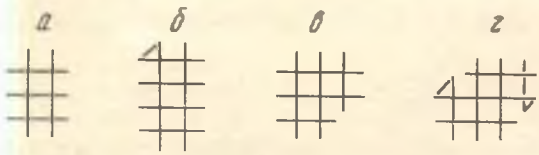


Рис. 12

правила симметрии и правила преобразований $Y_{(ik)(lm)}$. С учетом возможности введения Y все трансформационные матрицы и j-символы могут быть представлены в топологической форме. На рис. 12 в качестве примера даны графики 15 j-символов.

Итак, любой j-символ может быть представлен в топологической форме как соединение коэффициентов Рака. В этом параграфе не рассматриваются частные значения j-символов типа $9\,j$-символов, поскольку они могут быть легко получены с помощью подстановки $X_{ikl} \to Y_{(ik)(lm)}$. Структура соединений коэффициентов Рака значительно сложнее структуры соединений коэффициентов КГ. Последние выражаются через так называемые «древовидные» графы [34], которые являются независимыми. Что касается соединений коэффициентов Рака, то не все из них независимы. С помощью трансформационных матриц может быть получен целый ряд соотношений между различными j-символами:

$$[X_{1345} X_{2345} X_{1245}] = [X_{1234} X_{1235}]. \tag{2.44}$$

$$[X_{1267} X_{1247} X_{2347} X_{2357} X_{2567}] = \begin{bmatrix} X_{1234} X_{1235} X_{1256} \\ X_{1347} X_{1357} X_{1567} \end{bmatrix}, \tag{2.45}$$

$$[X_{1234} X_{1235} X_{1256} X_{1267} X_{1278} X_{1248}] = \begin{bmatrix} X_{1345} X_{1456} X_{1467} X_{1478} \\ X_{2345} X_{2456} X_{2467} X_{2478} \end{bmatrix}. \tag{2.46}$$

Графически эти соотношения представлены соответственно на рис. 13. Последовательным применением этих формул треугольные, пятиугольные и т. п. графики сводятся к четырехугольному «паркету». При обозначении j-символов удобно воспроизводить, как это сделано в правых частях формул (2.44) — (2.46), структуру «паркета». При анализе графиков типа

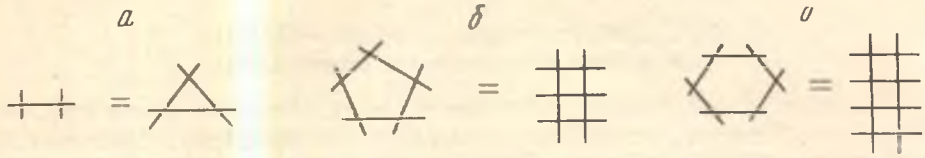


Рис. 13

«паркета» важное значение имеет соотношение

$$\begin{bmatrix} X_{1234}X_{2345}X_{2357} \\ X_{1246}X_{2456}X_{2567} \\ X_{1468}X_{4568}X_{5678} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1267}X_{1678} \\ X_{1237}X_{1378}X_{3578} \\ X_{1318}X_{3458} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{2349}X_{1234}X_{1347} \\ X_{2359}X_{1235}X_{1357} \\ X_{1256}X_{1567} \end{bmatrix} \qquad (2.47)$$

Графически это соотношение представлено на рис. 14. С помощью формул (2.44)—(2.47) и их обобщений можно перечислить все независимые графики j-символов. Независимые j-символы исчерпываются древовидными

Рис. 14

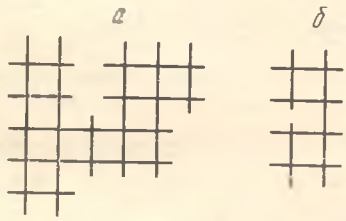


Рис. 15

графами с двойными линиями (рис. 15, *а*). При наличии одинарной линии (рис. 15, *б*) соответствующий j-символ распадается на произведение j-символов меньшего ранга. Заменяя отдельные X_{ikim} на частные значения $Y^{j}_{(ik)(lm)}$, можно перечислить все j-символы, включая величины типа 9 j-символов.

Топологическая запись j-символов, являясь единой в смысле подхода и обозначений, весьма компактна. Обычный способ записи значительно более громоздок, например, формула (2.44), согласно [35], имеет вид

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1' & l_2' & l_3' \end{Bmatrix} = \sum_{\varkappa} (-1)^{j_1+j_2+j_3+l_1+l_2+l_3+l_1'+l_2'+l_3'+\varkappa} (2\varkappa+1) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} l_1 & \varkappa & l_1' \\ l_3' & j_2 & l_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 & \varkappa & l_2' \\ l_1' & j_3 & l_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 & \varkappa & l_3' \\ l_2' & j_1 & l_2 \end{Bmatrix}. \qquad (2.48)$$

Выше применялись графики типа рис. 10, *в*, *г*,, поскольку они являются более удобными и компактными, чем графики типа рис. 10, *а*, *б*. Последние могут рассматриваться как полиэдры в трехмерном пространстве: символ (2.37) — куб, символ (2.38) — призма и т. д. Переход от графиков типа 10, *в*, *г*, к графикам типа рис. 10, *а*, *б* тривиален. Обратное преобразование, соответствующее переходу от трансформационных матриц типа (2.38) к соединению коэффициентов Рака типа (2.40), — значительно слож-

нее. При фиксированных конкретных индексах i в X_{ik} составляются циклы индексов kl и строится соответствующий древовидный график (рис. 15).

В целом рассмотренная трактовка теории угловых моментов выделяет чисто топологические соотношения, сохраняющиеся при любом значении моментов.

§ 5. Коэффициенты Клебша — Гордана и анализ комплексных интегралов

Топологический подход в теории угловых моментов имеет глубокие основания. Ниже кратко обрисованы некоторые дополнительные возможности топологических методов. Основное внимание уделяется связи коэффициентов КГ с многомерными комплексными интегралами, вытекающей из обобщения работы Баргмана [42]. Баргман рассматривает гильбертово пространство F_n, элементами которого являются целые аналитические функции $f(z)$, где $z = (z_1 z_2 \ldots z_n)$ — точка n-мерного комплексного евклидова пространства. Любая функция может быть всюду разложена в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{h_1 h_2 \ldots h_n} a_{h_1 h_2 \ldots h_n} z_1^{h_1} z_2^{h_2} \ldots z_n^{h_n}. \tag{2.49}$$

Скалярные произведения двух элементов определяются формулой

$$(ff') = \int \overline{f(z)} f'(z)\, d\mu_n(z), \tag{2.50}$$

где

$$d\mu_n(z) = \pi^{-n} \exp(-z\bar{z}) \prod_k dx_k dy_k, \qquad z_k = x_k + iy_k.$$

Производящая функция для символов Вигнера

$$\Phi(\tau\xi\eta) = \exp(D(\tau, \xi, \eta)), \tag{2.51}$$

где

$$D(\tau, \xi, \eta) = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \qquad \tau = (\tau_1\tau_2\tau_3), \qquad \xi = (\xi_1\xi_2\xi_3), \qquad \eta = (\eta_1\eta_2\eta_3)$$

— тройки комплексных переменных.

Для фиксированного τ производящая функция $\Phi_\tau = \Phi(\tau, \xi, \eta)$ является элементом F_6:

$$(\Phi_\tau \Phi_{\tau'}) = \int \left[\int \overline{\exp D(\tau\xi\eta)} \exp D(\tau\xi\eta)\, d\mu_3(\eta) \right] d\mu_3(\xi). \tag{2.52}$$

Производящая функция коэффициента Рака является элементом F_{12} и также записывается в виде многомерного интеграла. Баргман ограничивается этими двумя случаями. Однако его методика сравнительно легко может быть обобщена на случай произвольного соединения коэффициентов КГ. Производящие функции таких соединений аналогично (2.52) записываются через многомерные комплексные интегралы. В этих формулах охвачены все частные значения соединений, которые получаются при разложениях типа (2.49). Таким образом, топологическое исследование соединений коэффициентов КГ тесно связано с топологическими характеристиками (группами Бетти) многомерных комплексных интегралов. В работе Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама [115] было предложено привлечь к изучению аналитической структуры многомерных фейнмановских интегралов, возникающих в квантовой теории поля, гомологический метод. Исследование взаимосвязи между двумя топологическими подходами к комплексным

многомерным интегралам (развиваемым в настоящей главе и в работе [115]) представляется весьма интересным.

Следует подчеркнуть, что и графический метод в теории угловых моментов имеет не только чисто внешнюю аналогию с графиками Фейнмана в теории поля. Узлы в графиках Фейнмана соответствуют коэффициентам КГ для бесконечномерных представлений группы Лоренца. Поэтому не только методы [115] могут оказаться полезными в теории угловых моментов, но справедливо и обратное: исследование структуры обычных соединений КГ может быть существенным для некомпактных групп, в частности для теории поля.

В заключение отметим возможности использования топологических характеристик для физических состояний и процессов. Волновую функцию сложной системы (например, атом с определенным способом связи нескольких моментов) можно характеризовать группами Бетти. Очевидно, матричные элементы для переходов в такой системе также будут зависеть от способа сложения моментов. Поэтому и матричным элементам можно поставить в соответствие определенные группы гомологий. В этой связи представляется, что введение новых квантовых чисел p_r^s окажется полезным не только в записи соотношений теории угловых моментов через числа Бетти и указаний правил отбора при наличии сложных j-символов, но с точки зрения возможной геометризации теории атома и ядра. В целом взаимосвязь коэффициентов КГ с теорией аналитических функций и вопросы использования групп Бетти как характеристик сложных систем представляют значительный интерес и требуют дальнейшего исследования.

ГЛАВА III

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА ВЫСШИХ ГРУПП

Третья и четвертая главы посвящены построению коэффициентов КГ высших групп. В данной главе рассмотрены основания теории коэффициентов КГ полупростых групп Ли. Сюда отнесены вопросы редукции, инфинитезимальный подход (алгебры Ли), анализ базисов неприводимых представлений, проблема построения канонического базиса и ее связь с группой перестановок. Вопросы конкретного построения коэффициентов КГ высших групп в основном отнесены к следующей главе.

§ 1. Коэффициенты Клебша — Гордана высших групп. Схемы редукции

Общая теория коэффициентов КГ имеет ряд особенностей по сравнению с теорией угловых моментов. Во-первых, в ряду Клебша — Гордана появляются кратные представления. (В группе SU_2 кратные представления возникают при сложении нескольких моментов.) Для различения кратных представлений должен быть внесен внешний фактор, не содержащийся в группе (в группе SU_2 таким фактором является способ сложения моментов). Второй особенностью является неоднозначное определение канонического базиса, зависимость его от выбора цепочки подгрупп. Отметим, что та или иная схема редукции по подгруппам соответствует конкретным физическим задачам, где наблюдается иерархия физических симметрий (ср. § 1 гл. VI).

Примерами конкретных цепочек редукции могут служить

$$SU_n \supset SU_{n-1} \supset \ldots \supset SU_2; \qquad O_{2n+1} \supset O_{2n-1} \supset \ldots \supset O_3;$$
$$O_7 \supset G_2 \supset SU_2; \qquad SU_4 \supset \mathrm{Sp}\,4 \supset SU_2. \tag{3.1}$$

Можно показать (см. также § 4 настоящей главы), что коэффициенты КГ полупростых групп Ли могут быть записаны в факторизованном виде по подгруппам. Обозначая через $\varkappa(\mathcal{G})$ коэффициенты КГ группы $\mathcal{G}$, можно записать следующие соотношения для цепочек (3.1):

$$\begin{aligned}
\varkappa(SU_n) &= \Phi(SU_n/SU_{n-1})\,\Phi(SU_{n-1}/SU_{n-2})\ldots\Phi(SU_3/SU_2)\,\varkappa(SU_2),\\
\varkappa(O_{2n+1}) &= \Phi(O_{2n+1}/O_{2n-1})\ldots\Phi(O_5/O_3)\,\varkappa(O_3),\\
\varkappa(O_7) &= \Phi(O_7/G_2)\,\Phi(G_2/SU_2)\,\varkappa(SU_2),\\
\varkappa(SU_4) &= \Phi(SU_4/\mathrm{Sp}\,4)\,\Phi(\mathrm{Sp}\,4/SU_2)\,\varkappa(SU_2).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Фактор $\Phi(SU_3/SU_2)$ носит название изофактора.

Таким образом, для высших групп коэффициент КГ представляется в виде цепочки A/B-факторов. Отметим, что и для обычного коэффициента КГ можно записать

$$\varkappa(SU_2) = \Phi(SU_2/SU_1)\,\varkappa(SU_1) = \left\langle \begin{matrix} j_1 \\ m_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_2 \\ m_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j \\ m \end{matrix} \right\rangle \delta_{m_1+m_2,m}. \tag{3.3}$$

Основная задача теории коэффициентов КГ высших групп и состоит в вычислении системы факторов. В данной работе для ряда важных частных случаев найдено конкретное выражение этих факторов через коэффициенты КГ SU_2 и, как будет показано ниже, в принципе коэффициенты КГ высших групп могут быть представлены как нестандартные соединения коэффициентов КГ группы SU_2. Поэтому теория угловых моментов является фундаментом общей теории коэффициентов КГ.

Рассмотрение системы факторов типа (3.2) является эффективным не только для непрерывных, но и для дискретных групп. Так, в теории твердого тела при рассмотрении приложений пространственных групп Бирман [123] существенно использовал факторизацию этих групп (по группе трансляций). Необходимо подчеркнуть, что факторизация типа (3.2) возникает только при определенных базисах, определяемых цепочкой инвариантных подгрупп. Кроме того, наличие цепочки подгрупп не всегда является достаточным для различения кратных представлений, тогда необходимо способ различения задать дополнительно.

В этой главе рассмотрены основания теории коэффициентов КГ полупростых групп Ли. При анализе оснований возникают три аспекта: инфинитезимальный подход, составляющий фундамент теории; построение базисов, тесно связанное с классификацией волновых функций физических систем; взаимность унитарных линейных групп Ли и группы перестановок [51]. Последний аспект позволяет рассматривать представления полупростых групп Ли с помощью схем Юнга.

Для общей теории коэффициентов КГ будут использованы специфические обозначения:

$$\left\langle \begin{matrix} P_1'P_2'\ldots \\ R'S'\ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1''P_2''\ldots \\ R''S''\ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P_1P_2\ldots \\ R\,S\ldots \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.4}$$

В верхней строке записаны сигнатуры представлений, в нижней — соответствующие индексы базисных векторов. Например, для группы SU_3 имеются два индекса сигнатуры P, Q и три индекса базисных векторов (гиперзаряд Y, изоспин T, проекция изоспина t). Для коэффициента Вигнера [1] две черты, стоящие рядом, заменяются одной. Для последовательного сложения нескольких представлений (обобщенный коэффициент КГ) используется символ

$$\left\langle \begin{matrix} P_1'P_2'\ldots \\ R'S'\ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1''P_2''\ldots \\ R''S''\ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1'''P_2'''\ldots \\ R'''S'''\ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P_1P_2\ldots \\ R\,S\ldots \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.5}$$

[1] Коэффициент Вигнера в случае произвольной группы определяется как матрица, проектирующая произведение трех представлений на единичное подпространство.

При наличии системы факторов типа (3.2) для каждого из них можно записать определенные условия ортонормированности и симметрии. Для группы SU_3, например, имеем два фактора

$$\left\langle \begin{matrix} P_1Q_1 \\ Y_1T_1t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2Q_2 \\ Y_2T_2t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ YTt \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} P_1Q_1 \\ Y_1T_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2Q_2 \\ Y_2T_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ YT \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} T_1 \\ t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T \\ t \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.6}$$

Конкретное рассмотрение факторов отнесено к гл. IV, а их связь с теорией генеалогических коэффициентов исследована в § 1 гл. VI.

§ 2. Инфинитезимальный подход

В основе инфинитезимального подхода к проблеме построения коэффициентов КГ групп Ли лежит теория алгебр Ли. Это детально развитая теория, имеющая черезвычайно мощный и красивый аппарат. Она изложена в ряде обзоров и монографий (см., например, [36,49, 50, 52, 124—126]). На основе алгебр Ли в принципе можно получать любые величины, характеризующие группы Ли. Однако существует большой разрыв между общей постановкой вопроса и реальными расчетными схемами для физических задач. Ниже в этом параграфе приведен ряд известных соотношений, необходимых для приложений [49, 50, 52]. Затем на их основе развивается инвариантная методика построения инфинитезимальных матриц и коэффициентов КГ полупростых групп Ли.

Как известно, все представления групп Ли полностью определяются инфинитезимальными операторами, которые задаются коммутационными соотношениями. Стандартная форма коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_{\alpha_k}] &= \alpha_k^{(i)} E_{\alpha_k}, \\ [E_{\alpha_k}, E_{-\alpha_k}] &= \alpha_k^{(i)} H_i, \\ [E_{\alpha_k}, E_{\alpha_l}] &= N_{kl}^m E_{\alpha_m}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Сами инфинитезимальные операторы, входящие в (3.7), составляют так называемый базис Картана — Вейля. Вектор $\alpha_k = \{\alpha_k^1, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^l\}$ называется корневым вектором (или просто корнем); l — ранг группы, равный числу операторов H_i, коммутирующих друг с другом. N_{kl}^m полностью определяется через корни. Графическое (точнее, многомерное геометрическое) изображение корневых векторов α_i носит название корневой диаграммы. В корневом пространстве может быть задано скалярное произведение (α_i, α_k). Для лексикографического упорядочения корней выбирается базис из корней $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_l$ (число независимых корневых векторов равно рангу группы). По определению вектор $\rho = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \alpha_i$ положителен, если первый отличный от нуля коэффициент λ положителен. На основе этого упорядочения выбираются l простых корней α. Для простого корня $\alpha > 0$ и α не может быть записан в виде $\beta + \gamma$, где β и γ — положительные корни. Все корни представляются как линейная комбинация базисных.

В принципе, как следует из теории групп Ли и, в частности, из соотношений (3.7), все величины, включая коэффициенты КГ, должны определяться множеством корневых векторов, точнее, инвариантами, составленными из этих векторов (скалярными произведениями и детерминантами). Однако в таком виде задача не решалась. Ниже будет намечен путь для выражения инфинитезимальных матриц и коэффициентов КГ через указанные инварианты. Предварительно приведем результаты для перечисления

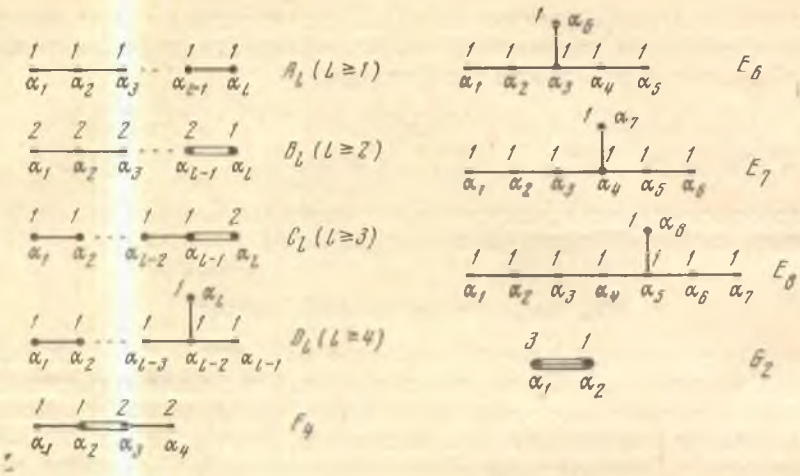


Рис. 16. Схемы Дынкина

всех полупростых групп Ли и для построения соответствующих алгебр Ли. В решение и разработку этой задачи основной вклад внесли Картан [127], Вейль [51], Дынкин [50]. На рис. 16 представлены схемы Дынкина [49, 50], соответствующие всем возможным допустимым полупростым группам Ли. Имеются четыре бесконечные серии: A_l соответствуют унитарным унимодулярным группам SU_{l+1}, B_l — группам вращения O_{2l+1}, C_l — симплектическим группам $\mathrm{Sp}\,(2l)$, D_l — группам вращения O_{2l}; группы G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 — так называемые особые группы Ли. l простых корней α_1, α_2, ..., α_l образуют базис корневого пространства. Числа, стоящие над каждым узлом, задают величины соответствующего скалярного произведения $(\alpha_i\alpha_i)$. По схемам Дынкина может быть сразу построена матрица Картана [49]

$$A_{ij} = \frac{2(\alpha_i\alpha_j)}{(\alpha_i\alpha_i)}. \tag{3.8}$$

Эта матрица обладает следующими свойствами: ее размерность — l; диагональные элементы равны 2; недиагональные могут принимать значения 0, —1, —2, —3; если на схеме Дынкина α_i и α_j не соединяются, то $A_{ij} = 0$; произведение $A_{ji}A_{ij}$ равно числу отрезков, соединяющих точки, отношение $A_{ji}/A_{ij} = (\alpha_i\alpha_i)/(\alpha_j\alpha_j)$. Числа, стоящие над каждым узлом α_i в схемах Дынкина, задают абсолютную величину скалярных произведений $(\alpha_i\alpha_i)$. Зная базисные корни, задаваемые схемой Дынкина, по матрице Картана можно определить все остальные корни. Если α_1 и α_2 — два любые корня, то корни вида $\alpha_2 + \lambda\alpha_1$ образуют арифметическую прогрессию с разностью α_1 (α_1 — серия, содержащая α_2). Длина серии $\alpha_2 - r\alpha_1$, $\alpha_2 - (r-1)\,\alpha_1$, ..., $\alpha_2 + q\alpha_1$ определяется соотношением

$$A_{12} = r - q. \tag{3.9}$$

При $r = 0$ длина серии прямо определяется матрицей Картана. Указанным образом может быть вычислен полный набор корней для любой заданной группы. Каждый корень записывается в виде $\alpha = \pm\sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$, где $k_i \geq 0$. Отметим, что группа ортогональных линейных преобразований в корневом пространстве

$$\alpha_j' = \alpha_j - A_{ij}\alpha_i \tag{3.9'}$$

носит название группы Вейля (здесь α — произвольный корень).

Перейдем к рассмотрению представлений групп Ли. Для этого необходимо ввести специальные реализации инфинитезимальных операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (3.7) в матричном виде. Если выбрано представление, в котором все H_i диагональны, то собственные функции $|m_i g\rangle$ и собственные значения m_i операторов H_i определяются соотношением

$$H_i\,|m_i g\rangle = m_i\,|m_i g\rangle. \tag{3.10}$$

l-компонентный вектор $m = \{m_1 m_2, \ldots, m_l\}$ называется весом, а l-мерное векторное пространство, натянутое на множество весов,— весовым пространством, индекс g различает функции с одинаковым весом (для кратных весов). Лексикографическая последовательность (порядок старшинства) определяется так же, как и для корней. Доминантный вес — это старший член в множестве эквивалентных весов, определяемых группой S (аналог группы Вейля для корней). Старший вес M — это вес, который старше любого другого доминантного веса. Он полностью определяет представление. Картан [127] показал, что существует l фундаментальных доминантных весов M, так что старший вес M любого представления может быть представлен в виде

$$M = \sum_{i=1}^{l} \varkappa_i M_i, \tag{3.11}$$

где $\varkappa_i$ — целые неотрицательные числа.

В соответствии с этим представления ранга l индицируются набором l чисел $\varkappa : D(\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_l)$.

Для реализации программы сведения расчетного аппарата к операциям над корнями необходимо выразить фундаментальные доминантные веса через корни. Обозначим для группы третьего ранга компоненты базисных корней следующим образом:

$$\alpha_1 = \{\alpha_1' \alpha_1'' \alpha_1'''\}, \qquad \alpha_2 = \{\alpha_2' \alpha_2'' \alpha_2'''\}, \qquad \alpha_3 = \{\alpha_3' \alpha_3'' \alpha_3'''\}. \tag{3.12}$$

Компоненты первого фундаментального веса задаются формулой

$$M_1 = \left\{ \frac{\frac{(\alpha_1\alpha_1)}{2}\begin{vmatrix} \alpha_2'' & \alpha_2''' \\ \alpha_3'' & \alpha_3''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1'' & \alpha_1''' \\ \alpha_2' & \alpha_2'' & \alpha_2''' \\ \alpha_3' & \alpha_3'' & \alpha_3''' \end{vmatrix}}, \frac{\frac{(\alpha_1\alpha_1)}{2}\begin{vmatrix} \alpha_2' & \alpha_2''' \\ \alpha_3' & \alpha_3''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1'' & \alpha_1''' \\ \alpha_2' & \alpha_2'' & \alpha_2''' \\ \alpha_3' & \alpha_3'' & \alpha_3''' \end{vmatrix}}, \frac{\frac{(\alpha_1\alpha_1)}{2}\begin{vmatrix} \alpha_2' & \alpha_2'' \\ \alpha_3' & \alpha_3'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1'' & \alpha_1''' \\ \alpha_2' & \alpha_2'' & \alpha_2''' \\ \alpha_3' & \alpha_3'' & \alpha_3''' \end{vmatrix}} \right\}. \tag{3.13}$$

Компоненты M_2 и M_3 получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Аналогично могут быть записаны формулы для фундаментальных весов более высокого ранга. Таким образом, с учетом (3.11) видно, что любой вес выражается через инвариантные комбинации корней.

Матрица $B_{ik} = \dfrac{2(M_k\alpha_i)}{(\alpha_i\alpha_i)}$ является аналогом матрицы Картана и может быть названа фундаментальной весовой матрицей. Для базисных корней α_i она задается формулой, вытекающей из (3.13):

$$B_{ik} = \frac{2(M_k\alpha_i)}{(\alpha_i\alpha_i)} = \delta_{ik}. \tag{3.14}$$

Аналог группы Вейля для произвольного веса m и корня β имеет вид [52]

$$m' = m - \frac{2(M\beta)}{(\beta\beta)}\,\beta. \tag{3.15}$$

Интересно отметить связь рассматриваемых здесь величин с проективной геометрией. Свяжем с корнями некоторое проективное пространство. Пусть компоненты веса β_1, β_2, β_3 играют в этом пространстве роль проективных координат. Для полного определения пространства расширим β_1, β_2, β_3 до произвольных значений. Тогда, согласно правилам проективной геометрии (см. например, [128]), величины

$$x = \frac{2(M_1\beta)}{(\alpha_1\alpha_1)} \frac{(\alpha_3\alpha_3)}{2(M_3\beta)}, \qquad y = \frac{2(M_2\beta)}{(\alpha_2\alpha_2)} \frac{(\alpha_3\alpha_3)}{2(M_3\beta)} \tag{3.16}$$

играют роль декартовых координат в этом пространстве. Характер связи с проективной геометрией аналогичен рассмотренному в § 2 гл. I для $n \times \times n$-символов, где R_{ik} расширялись до произвольных рациональных значений.

С помощью матриц A_{ik}, B_{ik} и формулы длины серии (3.9), справедливой и для весов, может быть получен полный набор весов в представлении $D(\varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_l)$. В общем случае веса имеют вид

$$M - \sum k_i \alpha_i, \tag{3.17}$$

где

$$M = \sum_{i=1}^{l} \varkappa_i M_i, \tag{3.18}$$

M — старший вес, а k_i — целые числа.

На рис. 17 приведены примеры соответствующих весовых диаграмм.

$D(10)$
$\times\times M$
$\times$

$D(20)$
$\times\times\times M$
$\times\times$
$\times$

$D(30)$
$\times\times\times\times M$
$\times\times\times$
$\times\times$
$\times$

$D(40)$
$\times\times\times\times\times M$
$\times\times\times\times$
$\times\times\times$
$\times\times$
$\times$

$D(11)$
$\times\times M$
$\times\times\times$
$\times\times$

$D(2)$
$\times\times\times M$
$\times\times\times\times$
$\times\times\times$
$\times\times$

$D(31)$
$\times\times\times\times M$
$\times\times\times\times\times$
$\times\times\times\times$
$\times\times\times$
$\times\times$

$D(22)$
$\times\times\times M$
$\times\times\times\times$
$\times\times\times\times\times$
$\times\times\times\times$
$\times\times\times$

Рис. 17. Примеры весовых диаграмм

Кратности весов n_m могут быть найдены по рекуррентной формуле Фрейденталя [49, 129]

$$(M+\delta, M+\delta) - (m+\delta, m+\delta)\, n_m = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ \alpha>0}}^{\infty} n_{m+k\alpha}\, (m+k\alpha, \alpha), \tag{3.19}$$

где

$$\delta = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha>0} \alpha\Big).$$

Общая формула для размерности $\mathfrak{M}$ представлений имеет вид [49]

$$\mathfrak{M}(\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_l) = \prod_{(k_i)} \frac{\sum_{i=1}^{l} (\varkappa_i + 1)\, w_i k_i}{\sum_{i=1}^{l} w_i k_i}, \tag{3.20}$$

где w_i — вес узла в соответствующей схеме Дынкина.

В рассмотренной выше методической части содержатся необходимые формулы для вычисления полного набора корней данной группы, вычисления набора весов неприводимых представлений и их кратностей, а также размерностей представлений. Используя приведенные результаты (и некоторые дополнительные соотношения), можно вычислить формулы ветвления, задающие кратности содержаний представлений подгрупп G_i в неприводимых представлениях группы G. Частным случаем правил ветвления являются кратности в ряду Клебша — Гордана (редукция $G \times G \to G$). Вопросы, связанные с кратностями, являются необходимым элементом любого группового анализа физических систем. Имеется большой объем литературы как по методике расчета кратностей [130—132], так и по результатам для конкретных групп [133—136]. В приложении приводится конкретный справочный материал по перечисленным вопросам (большая часть приведенных данных в той или иной форме была известна ранее). Однако кратности отнюдь не исчерпывают прикладных сторон теоретико-группового анализа. Для большинства физических приложений необходимо получить явный вид матричных представлений алгебр Ли. Матричный вид операторов H_i определен (3.10). Для нахождения повышающих и понижающих операторов E_α и $E_{-\alpha}$ используются соотношения коммутации. Из (3.10) следует [52]

$$H_i E_{-\alpha} \,|\, m_i g\rangle = (m_i - \alpha^{(i)})\, E_{-\alpha} \,|\, m_i g\rangle. \tag{3.21}$$

Это значит, что $E_{-\alpha}$, действуя на вектор m, переводит его в базисный вектор, соответствующий собственному значению $m - \alpha$. Матричные элементы $E_{-\alpha}$, отличные от нуля, имеют вид (опускаем индекс g):

$$E_{-\alpha_1} \,|\, m\rangle = a^{-\alpha_1}_{m;\, m-\alpha_1} \,|\, m - \alpha_1\rangle. \tag{3.22}$$

Так, полный набор понижающих инфинитезимальных операторов представления D (10) группы SU_3 имеет вид:

$$\begin{aligned} E_{-\alpha_1} \,|\, m\rangle &= a^{-\alpha_1}_{m;\, m-\alpha_1} \,|\, m - \alpha_1\rangle, \\ E_{-\alpha_2} \,|\, m - \alpha_1\rangle &= a^{-\alpha_2}_{m-\alpha_1;\, m-\alpha_1-\alpha_2} \,|\, m - \alpha_1 - \alpha_2\rangle, \\ E_{-\alpha_1-\alpha_2} \,|\, m\rangle &= a^{-\alpha_1-\alpha_2}_{m;\, m-\alpha_1-\alpha_2} \,|\, m - \alpha_1 - \alpha_2\rangle. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Константы $a^{-\alpha}_{m;\, m-\alpha}$ вычисляются последовательно, начиная с векторов $|\, m\rangle$, для которых $E_\alpha \,|\, m\rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \langle m \,|\, [E_\alpha E_{-\alpha}] \,|\, m\rangle &= \langle m \,|\, E_\alpha E_{-\alpha} \,|\, m\rangle - \langle m \,|\, E_{-\alpha} E_\alpha \,|\, m\rangle = \\ &= a^{-\alpha_1}_{m;\, m-\alpha_1} a^{\alpha_1}_{m-\alpha_1;\, m} \langle m \,|\, m\rangle = (a^{-\alpha_1}_{m;\, m-\alpha_1})^2 = \langle m \,|\, (\alpha H) \,|\, m\rangle = (\alpha m). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Проведя последовательные вычисления, имеем:

$$\begin{aligned} a^{-\alpha_1}_{m-\alpha_1;\, m-2\alpha_1} &= [2(\alpha_1 m) - (\alpha_1\alpha_1)]^{1/2}, \\ a^{-\alpha_1}_{m-2\alpha_1;\, m-3\alpha_1} &= [3(a_1 m) - 3(\alpha_1\alpha_1)]^{1/2} \end{aligned} \tag{3.25}$$

и в общем случае

$$a^{-\alpha_1}_{m-(k-1)\alpha_1;\, m-k\alpha_1} = \left[k(\alpha_1 m) - \frac{k(k-1)}{2}(\alpha_1\alpha_1)\right]^{1/2}. \tag{3.26}$$

Подставляя сюда значение старшего веса группы SU_2 $m = j$, $k = j - \nu + 1$, получаем известное выражение [31]

$$A^{-1}e_\nu = \sqrt{\frac{j(j+1) - \nu(\nu+1)}{2}}\, e_{\nu-1}. \tag{3.27}$$

Для высших групп положение сложнее, хотя способ расчета аналогичен. Так, для представлений D ($P0$) группы SU_3 имеем

$$a^{-\alpha_1}_{m-r\alpha_2-(r+k-1)\alpha_1;\, m-r\alpha_2-(r+k)\alpha_1} = \left[k(\alpha_1 m) - kr(\alpha_1\alpha_2) - \left(rk + \frac{k(k-1)}{2}\right)(\alpha_1\alpha_1)\right]^{1/2},$$

$$a^{-\alpha_2}_{m-k\alpha_1-(l-1)\alpha_2;\, m-k\alpha_1-l\alpha_2} = \left[l(\alpha_2 m) - kl(\alpha_1\alpha_2) - \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_2\alpha_2)\right]^{1/2}. \tag{3.28}$$

Во всех случаях матричные элементы повышающих и понижающих операторов выражаются через скалярные произведения старшего веса и корней.

Коэффициенты КГ могут быть определены из рекуррентных соотношений, получаемых из формул типа

$$E_{-\alpha}(|m_1\rangle|m_2\rangle) = (E_{-\alpha}|m_1\rangle)|m_2\rangle + |m_1\rangle(E_{-\alpha}|m_2\rangle). \tag{3.29}$$

Таким образом, в принципе все величины получаются из сложных конструкций корней. Этот аспект является весьма интересным и требует дальнейшего изучения.

Обычно для нахождения $E_{-\alpha}$, E_α используются операторы Казимира, коммутирующие со всеми матричными операторами, а также дифференциальное представление операторов. Этот круг вопросов рассмотрен, например, в работах [53, 137—140]. В целом инфинитезимальный подход весьма эффективен в решении принципиальных вопросов группы Ли, однако он громоздок при конкретных расчетах коэффициентов КГ.

§ 3. Базисы неприводимых представлений

В зависимости от конкретных физических приложений базисы неприводимых представлений могут выбираться по-разному. Для целого ряда физических задач роль базиса играет волновая функция системы. Нумерация же базисов тесно связана с вопросами классификации состояний.

Приведем в качестве примера цепочку (3.1) групп SU_n. С помощью инфинитезимального подхода, рассмотренного в § 2 этой главы, можно записать канонический базис, определяемый стандартным видом коммутационных соотношений (см., например, [54, 58, 66, 141, 142]). Собственные векторы неприводимых представлений D $(P_1 \ldots P_n)$ групп SU_{n+1} нумеруются собственными значениями аддитивных операторов H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а также $1/2\, n\,(n-1)$ собственными значениями неаддитивных операторов, в качестве которых можно взять операторы Казимира K_i^α группы $SU_n \ldots SU_2$, где $i = 2, \ldots, n$, $\alpha = 2, \ldots, i^2$. Вместо этой нумерации можно использовать эквивалентную нумерацию Гельфанда — Цетлина [143]

$$\begin{array}{c} P_1 \ldots\ldots\ldots\ldots P_n \\ H_1 P_1' \ldots\ldots\ldots P_{n-1}' \\ H_2 P_1'' \ldots\ldots P_{n-2}'' \\ \ldots\ldots\ldots \\ H_{n-1} \end{array} \tag{3.30}$$

[2] Операторы K_i^α определены здесь несколько иначе, чем в [54]. Связь между обоими обозначениями задается формулой $K_i^\alpha = I^{n+1-i}_\alpha$.

Здесь в первой строке содержится сигнатура группы SU_{n+1}, во второй — сигнатура SU_n, в третьей — сигнатура SU_{n-1} и т. д. Канонический базис ортонормирован и задается тремя блоками чисел

$$\{|[P]; [K_i^\alpha]; [H_i]\rangle\}. \tag{3.31}$$

Наряду с инфинитезимальным способом для построения базисов неприводимых представлений можно использовать группу перестановок. В работе [5] на основе схем Юнга был построен базис, называемый симметрическим. Каждому неприводимому представлению группы SU_n ставится в соответствие схема Юнга, число строк которой не превышает $n-1$ (столбцам схемы Юнга, содержащим n строк, соответствует инвариант группы SU_n). Тогда сигнатура представления $D(P_1P_2 \ldots P_n)$ характеризует числа столбцов одинаковой длины. P_m означает число столбцов в схеме Юнга с одинаковой длиной в m клеток.

Базисные векторы группы SU_n определяются через независимые миноры детерминанта $|u_{ik}|$, $i, k = 1, \ldots, n-1$ и могут быть записаны в виде

$$\begin{vmatrix} p_i \\ p_{ik} \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix} = \left[\frac{P_1! \quad P_2! \quad \ldots \quad P_{n-1}!}{\prod\limits_{ik\ldots} p_{1ik\ldots}! \prod\limits_{ik} p_{2ik\ldots}! \cdots \prod\limits_{i} p_{n-1i}!}\right]^{1/2} \prod (\varepsilon_{ik\ldots rs}u_{1s})^{p_{1ik\ldots}} \times$$

$$\times (\varepsilon_{ik\ldots rs}u_{1r}u_{2s})^{p_{2ik\ldots}} (\varepsilon_{ik\ldots qrs}u_{1q}u_{2r}u_{3s})^{p_{3ik\ldots}} \times \ldots \times (\varepsilon_{ik\ldots rs}u_{1k}\ldots u_{n-1s})^{p_{n-1i}} \tag{3.32}$$

Здесь

$$\sum_{ik\ldots} p_{1ik\ldots} = P_1, \qquad \sum_{ik\ldots} p_{2ik\ldots} = P_2, \ldots, \qquad \sum p_{n-1i} = P_{n-1}.$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Каждой клетке схемы Юнга соответствует свой вектор u_{ik}. В частном случае группы SU_3 симметрический базис имеет вид

$$\sqrt{\frac{P! \qquad Q!}{p_1!p_2!p_3! \quad q_1!q_2!q_3!}}\, u_1^{p_1}u_2^{p_2}u_3^{p_3}(\varepsilon_{1kl}u_kv_l)^{q_1}\,(\varepsilon_{2kl}u_kv_l)^{q_2}(\varepsilon_{3kl}u_kv_e)^{q_3}. \tag{3.33}$$

Каждый из сомножителей в (3.32) является минором детерминанта $|u_{ik}^{(n)}|$, составленного из первых строк и произвольных столбцов. Выбор нормировочного множителя определяется тем, что при свертке базисного вектора представления $D(0 \ldots 0P0 \ldots 0)$ с сопряженным должен получиться детерминант в степени P. Если не конкретизировать выбор независимых миноров, то симметрический базис можно записать в более общем виде

$$\left[\frac{P_1! \qquad P_2! \qquad \ldots P_{n-1}!}{\prod\limits_{i} p_{1,i}! \prod\limits_{ik} p_{2,ik}! \cdots \prod\limits_{i} p_{n-1,i}!}\right]^{1/2} r_{1,i}^{p_{1,i}} r_{2,ik}^{p_{2,ik}} \ldots (r_{r-1,i}^{i})^{p_{n-1,i}}. \tag{3.34}$$

При этом для антисимметрических тензоров $r_{ik\ldots}$ должны выполняться дополнительные условия типа $r_{1,i}r_{n-1}^{i} = 0$; $r_{1,i}r_{2,kl}\varepsilon^{ikl} = 0$. В базисе (3.32) они выполняются автоматически. В частных случаях SU_2, SU_3, SU_4 имеем:

$$\sqrt{\frac{P!}{p_1!\ p_2!}}\, u_1^{p_1}u_2^{p_2},$$

$$\sqrt{\frac{P! \qquad Q!}{p_1!\ p_2!\ p_3! \quad q_1!\ q_2!\ q_3}}\, u_1^{p_1}u_2^{p_2}u_3^{p_3}\xi^{q_1}\xi^{q_2}\xi^{q_3}, \tag{3.35}$$

$$\sqrt{\frac{P! \qquad Q! \qquad R!}{\prod\limits_{i} p_i! \prod\limits_{ik} q_{ik}! \prod\limits_{i} r_i}}\, \prod_{i} x_i^{p_i} \prod_{ik} \tau_{ik}^{q_{ik}} \prod_{i} \xi^{r_i}.$$

Симметрический базис (3.32) обладает двумя замечательными свойствами. Во-первых, при свертке произвольного базисного вектора определенного представления группы SU_n с сопряженным вектором возникает произведение детерминантов $(2n+1)$-го порядка в степенях $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Таким образом, построенный инвариант имеет большую симметрию, его рассмотрение тесно связано с теорией $n \times n$-символов (см. также § 3 гл. IV). Во-вторых, симметрический базис факторизован, т. е. состоит из отдельных множителей, являющихся базисами представлений D (P00 ...), D (0P0... ...), D (00P ...) ... Это делает его чрезвычайно удобным при сужении на подгруппу и конкретном построении коэффициентов КГ, несмотря на то, что не все компоненты симметрического базиса линейно-независимы. Это обусловлено линейной зависимостью инвариантов (ср. § 4 гл. I). Канонический и симметрический базисы связаны соотношением

$$|[P]; [K_i^2]; [H_i]\rangle = \sum_{\substack{p_i \cdot p_{ik} \cdot p_{ikl} \cdots \\ i<k \quad i<k<l}} \left(\begin{array}{c|c} [P] & p_i \\ [K_i^2] & p_{ik} \\ [H_i] & \ldots \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} p_i \\ p_{ik} \\ \ldots \end{array} \right|. \tag{3.36}$$

Для определения коэффициента преобразования можно использовать коэффициенты КГ частного вида. Для группы SU_3 связь между симметрическим базисом и каноническим (компоненты нумеруются Y, T, t) имеет вид

$$|PQ; YTt\rangle_{(x\xi)} = \sum_{p_i\, q_i} \left\langle \begin{array}{c|c} P0 & 0Q \\ Y_1T_1t_1 & Y_2T_2t_2 \end{array} \right\| \begin{array}{c} PQ \\ YTt \end{array} \Big\rangle (-1)^{q_i} \left\{ \begin{array}{c} p_i \\ q_i \end{array} \right\}_{(x\xi)} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{3.37}$$

Здесь

$$Y_1 = P/3 - p_3, \quad T_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad t_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2);$$

$$Y_2 = -Q/3 + q_3, \quad T_2 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad t_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1). \tag{3.38}$$

При редукции $SU_3 \supset SU_2$ коэффициент преобразования можно представить как $\Phi \begin{pmatrix} PQ \\ YT \end{pmatrix} \left\langle \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ t_1 & t_2 \end{array} \right\| \begin{array}{c} T \\ t \end{array} \Big\rangle$. Численное значение данного коэффициента КГ группы SU_3 приведено в § 1 гл. IV.

В случае произвольной группы SU_n алгоритм построения коэффициентов преобразования аналогичен группе SU_3. ($(-1)^{q_i}$ возникает в (3.37) из-за конкретного [53] выбора фаз в коэффициенте КГ). Связь канонического базиса с симметрическим для представления D (0P0 ...) группы SU_4 рассмотрена в § 4 гл. IV. Зная взаимосвязь базисов фундаментальных представлений, последовательно складывая их, в качестве коэффициентов преобразования получаем величину

$$\left\langle \begin{array}{c|c|c|c} P_100\ldots & 0P_20\ldots & 00P_3\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\| \begin{array}{c} P_1P_2P_3\ldots \\ \ldots \end{array} \Big\rangle, \tag{3.39}$$

являющуюся суммой произведений коэффициентов КГ частного вида. Ряд дополнительных данных по формулам перехода между базисами содержится в статье [21] настоящего сборника.

Следует подчеркнуть, что поскольку матрица коэффициентов КГ является унитарной, то и матрица коэффициентов преобразования унитарна, и существует обратное преобразование. Поэтому, несмотря на линейную зависимость компонент симметрического базиса, он с успехом может быть использован в расчетах.

Наряду с каноническим и симметрическим базисами важную роль играет тензорный базис. В соответствии со взаимосвязью между группой

перестановок и группами SU_n, детально проанализированной Вейлем [51], тензорный базис неприводимых представлений строится с помощью симметризаторов Юнга, действующих на индексы тензоров $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Компоненты неприводимых представлений нумеруются согласно заполненным схемам Юнга. Конкретный случай тензорного базиса группы O_4 был подробно рассмотрен в работе [144]. Отметим, что так же, как и для симметрического базиса, не все компоненты тензорного базиса линейно-независимы. Взаимосвязь между тензорным и симметрическим базисами очевидна, она осуществляется путем отождествления набора векторов, соответствующих одной и той же строке. Взаимосвязь же тензорного и канонического базисов [3] является частью более общего вопроса, представляющего значительный самостоятельный интерес. Соответствующее рассмотрение проведено в следующем параграфе.

§ 4. Построение канонического базиса в тензорном пространстве

Наряду с инфинитезимальным подходом и исследованием базисов неприводимых представлений принципиальную роль играет разложение (редукция) тензорного пространства R^f на неприводимые подпространства [19]. Предполагается, что пространство R — объект представления $D_j(G)$ группы симметрии G. Редукции тензорного пространства $R^f = R \times R \times \ldots \times R$ соответствует построение в нем канонического базиса путем объединения канонических базисов $|Jm\rangle$ неприводимых компонент R^f (J — индексы неприводимого представления, m нумерует компоненты базиса). Для этих базисов матрицы $D_J(G)$ имеют стандартный вид, определяемый формой коммутационных соотношений генераторов группы G.

Пусть $|jm\rangle = |m\rangle$ — канонический базис исходного n-мерного пространства R, в котором действует неприводимое представление $D_j(G)$ группы G. Расширим исходное неприводимое представление $D_j(G)$ до фундаментального неприводимого представления $D(10\ldots0)$ группы SU_n путем дополнения генераторов G (в приложениях обычно $G = SU_2$) до набора генераторов SU_n, реализованных как неприводимые тензорные операторы группы G. Тем самым фиксируется схема вложения группы G в SU_n.

Образуем в R^f, преобразующемся по $[D_j(G)]^f$ (и $D^f(10\ldots0)$ SU_n), тензорный базис

$$|m_1 \ldots m_f\rangle = |m_1\rangle_{(1)} |m_2\rangle_{(2)} \ldots |m_f\rangle_{(f)}. \tag{3.40}$$

(Индексы (α) нумеруют изоморфные пространства R.) Зададим в пространстве R^f наряду с D^f $(10\ldots0)$ действие группы перестановок π_f:

$$\hat{\pi}(s)\,|m_1 \ldots m_f\rangle = |m_{s_1} \ldots m_{s_f}\rangle, \qquad \hat{\pi}(s) \in \pi_f. \tag{3.41}$$

Рассмотрим редукцию R^f на пространства, неприводимые относительно $\pi_f \times G$. Первым этапом решения этой задачи будет разложение R^f на неприводимые относительно $\pi_f \times SU_n$ подпространства, которые затем разлагаются на неприводимые относительно цепочки подгрупп подпространства. Вейль [24, 51] показал, что если R — пространство фундаментального представления группы GL_n, то пространство R^f вполне приводимо относительно группы $\pi_f \times GL_n$ (и $\pi_f \times SL_n$), причем неприводимые подпространства $R^{[f]}$ определяются заданием схем Юнга: $R^f = \sum_{[f]} R^{[f]}$, где $[f] = [f_1 f_2 \ldots f_n]$ — сигнатура соответствующей схемы Юнга; суммирование проводится по всем допустимым $[f]$. Между разложениями R^f относительно π_f и GL_n (SU_n) имеет место определенная взаимность. Кратность вхожде-

[3] Взаимосвязь тензорного и канонического базисов для частного случая O_4 была рассмотрена в работе [145].

ния в R^f эквивалентных, неприводимых относительно π_f, пространств равна размерности соответствующего неприводимого пространства относительно группы GL_n. И наоборот, кратность вхождения неприводимого представления относительно GL_n равна размерности соответствующего неприводимого представления π_f. Размерность $R^{[f]}$ ($\dim R^{[f]}$) равна произведению размерностей неприводимых представлений π_f и GL_n, отвечающих одной и той же схеме Юнга.

В каждом подпространстве $R^{[f]}$ канонический базис $|[f];\ (M);\ (Y)\rangle$ представления группы $\pi_f \times SU_n$ может быть записан как однотипный произведению базисов неприводимых представлений π_f и SU_n. Символы (Y) и (M) обозначают наборы чисел, нумерующих соответственно базисные векторы канонического базиса π_f и SU_n. Представляя векторы канонического базиса R^f как точки в координатах (Y) и (M), получаем квазидиагональную матрицу, распадающуюся на прямоугольники, каждый прямоугольный ящик соответствует неприводимому представлению $[f]$ группы $\pi_f \times SU_n$ (схема Юнга), каждая строка — каноническому базису неприводимого представления SU_n, каждый столбец — каноническому базису неприводимого представления π_f.

Реализация канонического базиса в R^f может быть осуществлена с помощью некоторого унитарного преобразования S исходного тензорного базиса:

$$|[f];\ (M);\ (Y)\rangle = \sum_{m_1\ldots m_f} S\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)\\ m_1 m_2\ldots m_f\end{pmatrix} |m_1\ldots m_f\rangle. \tag{3.42}$$

Элементы матрицы S (коэффициенты редукции R^f, S-коэффициенты) определяются требованиями каноничности базиса $|[f];\ (M);\ (Y)\rangle$. К ним относятся условия ортонормированности

$$\sum_{m_1\ldots m_f} S\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)\\ m_1\ldots m_f\end{pmatrix} \bar{S}\begin{pmatrix}[f]';\ (M)';\ (Y)'\\ m_1\ldots m_f\end{pmatrix} = \delta_{[f][f]'}\delta_{(M)(M)'}\delta_{(Y)(Y)'}, \tag{3.43}$$

$$\sum_{[f](M)(Y)} S\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)\\ m_1\ldots m_f\end{pmatrix} \bar{S}\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)\\ m_1'\ldots m_f'\end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{f} \delta_{m_i m_i'}$$

и условия стандартности выражений для матриц неприводимых представлений группы $\pi_f \times SU_n$, приводящие к системе линейных уравнений при действии генераторов SU_n на обе части равенства (3.42)

$$(\hat{K}_j)^{M'}_{M} S\begin{pmatrix}[f];\ (M');\ (Y)\\ m_1\ldots m_f\end{pmatrix} = (\hat{K}_j)^{m_1'}_{m_1} S\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)\\ m_1' m_2\ldots m_f\end{pmatrix} + \\ + \ldots + (\hat{K}_j)^{m_f'}_{m_f} S\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)\\ m_1\ldots m_{f-1} m_f'\end{pmatrix} \tag{3.44}$$

и при действии операций из группы π_f

$$[\hat{\pi}(s)]^{Y'}_{Y} S\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)'\\ m_1\ldots m_f\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}[f];\ (M);\ (Y)\\ m_{\pi_1} m_{\pi_2}\ldots m_{\pi_f}\end{pmatrix} \tag{3.45}$$

(по дважды повторяющимся индексам — суммирование).

Уравнения (3.43) — (3.45) определяют S-коэффициенты с точностью до общей фазы. В силу линейности и вещественности (при соответствующем выборе K_i) уравнений (3.44), (3.45) S-коэффициенты можно выбирать действительными. При практическом нахождении S-коэффициентов удобнее использовать различные специальные методы, так или иначе учитывающие структуру уравнений (3.44), (3.45) для факторизации решения (в соответствии с рассмотренной схемой канонического базиса). В резуль-

тате матрица S из (3.42) запишется (в операторном виде) так:

$$\hat{S} = \hat{S}^{(1)} \times \hat{S}^{(2)} \times \ldots \times \hat{S}^{(s)}, \tag{3.46}$$

где «субматрицы» $\hat{S}^{(\alpha)}$ соответствуют последовательным шагам редукции R^f (выделению подпространств, неприводимых относительно цепочки подгрупп). Такая факторизация S-коэффициентов весьма существенна при расчетах.

Практические методы вычисления коэффициентов редукции детально рассмотрены в [19] и статье [21] в данном сборнике. Вопросы построения коэффициентов редукции тесно связаны с тремя проблемами: с переходом от тензорного базиса к каноническому (S-коэффициенты полностью определяют формулы перехода), с теорией генеалогических коэффициентов (см. также § 4 гл. V и § 1 гл. VI), с представлениями группы перестановок.

§ 5. Группы перестановок и коэффициенты редукции

Группы перестановок чрезвычайно широко используются в теории коэффициентов КГ: при определении тензорного базиса, при вычислении некоторых «нестандартных соотношений», при перемножении неприводимых представлений с помощью схем Юнга и т. д. Коэффициенты редукции дают возможность перевода целого ряда вопросов теории групп перестановок (в частности, нахождение матричных элементов и коэффициентов КГ групп перестановок) на язык коэффициентов КГ групп SU_n (в конечном счете на язык теории угловых моментов) [19]. Как указывалось выше, система уравнений (3.43)—(3.45) позволяет находить коэффициенты редукции по известным матричным элементам $(\hat{K}_j)^{m_i}_{m_i}$, $(\hat{K}_j)^{M'}_{M}$, $[\hat{\pi}(s)]^{Y'}_{Y}$. Однако если S-коэффициенты определены, то соотношение (3.45) можно использовать для нахождения матричных элементов, представлений группы перестановок π_f

$$[\hat{\pi}(s)]^{Y'}_{Y} = \sum_{m_1 \ldots m_f} S\begin{pmatrix} [f]; & (M); & (Y') \\ & m_1 \ldots m_f & \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} [f]; & (M); & (Y) \\ & m_{s_1} \ldots m_{s_f} & \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Рассмотрим в качестве примера следующую схему редукции R^f:

$$R^f = R^{f-1} \times R = \sum_{[f-1]} R^{[f-1]} \times R, \tag{3.48}$$

предполагая R преобразующимся по представлению $D_{1/2}$ группы SU_2. Тогда, учитывая связь J с параметрами схемы Юнга, получаем следующее выражение для S-коэффициентов через обычные коэффициенты КГ:

$$S\begin{pmatrix} [f]; & J; & M; & [Y] \\ & m_1 \ldots m_f & & \end{pmatrix} = \sum_{m_{ij}} \left\langle \begin{matrix} 1/2 \\ m_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_{12} \\ m_{12} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j_{12} \\ m_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_3 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_{123} \\ m_{123} \end{matrix} \right\rangle \ldots$$
$$\ldots \left\langle \begin{matrix} j_{12\ldots(n-1)} \\ m_{12\ldots(n-1)} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_f \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.49}$$

Здесь принята схема связи $(\ldots((12)3)\ldots f)$ угловых моментов. Соответствие между набором чисел $(j_{12}, j_{123}, \ldots, j_{123\ldots(n-1)})$, символом (Y), играющим роль символа Яманучи [32, 146], и заполненными схемами Юнга фиксируется однозначно. Например, имеем

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ \hline 6 & 8 & & & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow (Y) = (21211111) \longrightarrow (j_{12\ldots}, j_{12\ldots 9}) = (1, 3/2, 2, 5/2, 2, 5/2), \tag{3.50}$$

Подставляя в (3.47) выражение (3.49) для S-коэффициентов, получаем

$$[\hat{\pi}(s)]^{Y}_{Y'} = \sum_{\substack{m_1 \ldots m_f \\ m_{12} m_{123} \ldots \\ m'_{12}\, m'_{123} \ldots}} \left\langle \begin{matrix} 1/2 \\ m_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j'_{12} \\ m'_{12} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j'_{12} \\ m'_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_3 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j'_{123} \\ m'_{123} \end{matrix} \right\rangle \ldots$$

$$\ldots \left\langle \begin{matrix} j'_{12\ldots(f-1)} \\ m_{12\ldots(f-1)} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_f \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1/2 \\ m_{s_1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_{s_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_{12} \\ m_{12} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j_{12} \\ m_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_{s_3} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_{123} \\ m_{123} \end{matrix} \right\rangle \ldots$$

$$\ldots \left\langle \begin{matrix} j_{12\ldots(f-1)} \\ m_{12\ldots(f-1)} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ m_f \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.51}$$

Здесь $(m_{s_1} \ldots m_{s_f})$ — цепочка из чисел $(m_1 \ldots m_f)$, полученная из исходного набора с помощью перестановки.

Следовательно, матричные элементы неприводимых представлений группы π_f могут выражаться через трансформационные матрицы группы SU_2, при этом базисные функции неприводимого представления группы π_f нумеруются символом (Y), однозначно связанным с набором промежуточных моментов соответствием типа (3.50). В частности, матрица транспозиции $S = (i, k)$ выражается через $6j$-символы, например:

$$[\hat{\pi}(13)]^{Y}_{Y'} = (-1)^{2j_{123}} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & j'_{12} \\ 1/2 & j_{123} & j_{12} \end{Bmatrix} (2j_{123}+1)\sqrt{(2j_{12}+1)(2j'_{12}+1)}. \tag{3.52}$$

Таким образом, можно вычислить матричные элементы неприводимых представлений π_f, отвечающих двустрочным схемам Юнга, с помощью трансформационных матриц SU_2. Учитывая связь [32, 146] между неприводимыми представлениями π_f, отвечающими сопряженным схемам Юнга, можно вычислить матричные элементы $[\hat{\pi}(s)]^{Y'}_{Y}$ для неприводимых представлений π_f, соответствующих схемам Юнга с двумя столбцами. При вычислении матриц произвольных неприводимых представлений π_f нужно использовать трансформационные матрицы SU_n $(n \geqslant 3)$.

Кроме матричных элементов неприводимых представлений группы π_f, с помощью коэффициентов редукции можно вычислить и коэффициенты КГ группы π_f, выражая их через коэффициенты КГ и трансформационные матрицы групп SU_n. Для этого нужно рассмотреть случай, когда $R = R_1 \times R_2$, где R_1 — базис представления SU_{n_1}, R_2 — базис представления SU_{n_2}. Канонический базис R^f связан с каноническими базисами R^f_1 и R^f_2 посредством коэффициентов КГ группы π_f

$$|[f];\ (J_1 M_1;\ J_2 M_2);\ [f]';\ [f]'';\ a(Y)\rangle =$$

$$= \sum_{(Y_1)(Y_2)} \left\langle \begin{matrix} [f]' \\ (Y_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [f]'' \\ (Y_2) \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} [f] \\ (Y) \end{matrix} \right\} (a) \Big\rangle |[f]';\ J_1, M_1;\ (Y_1)\rangle\, |[f]'';\ J_2, M_2;\ (Y_2)\rangle, \tag{3.53}$$

где индекс a отражает неоднозначность определения [32] коэффиецинтов КГ π_f, с одной стороны, и различает кратные $D_{J_1} \times D_{J_2}$, входящие в разложение неприводимых представлений SU_n, соответствующее схеме Юнга $[f]$, — с другой. Отсюда коэффициенты КГ группы π_f могут быть вычислены с помощью известных коэффициентов редукции. Таким образом, формализм и расчетные методы группы перестановок сводятся с помощью S-коэффициентов к формализму теории угловых моментов. Это же относится и к точечным группам, которые изоморфны определенным группам перестановок.

§ 6. Специальные функции и коэффициенты Клебша — Гордана

Теория специальных функций развивалась в течение длительного времени как теория решений дифференциальных уравнений. Эта теория включает в себя огромное количество формул и соотношений [147—150]. Число специальных функций также довольно велико. К числу их, например, относятся: гипергеометрическая функция, обобщенные гипергеометрические функции, полиномы Якоби, Лежандра, Чебышева, Эрмита, Лагерра, Гегенбауэра, функции Лежандра, Матье, Бесселя, Уиттекера и т. д. В монографии Виленкина [150] был предложен единый групповой подход к большому классу специальных функций и показана чисто групповая природа многочисленных соотношений между ними. Однако произведенная групповая классификация специальных функций, по-видимому, является лишь первым шагом. В дальнейшем необходимо установление связи с теорией коэффициентов КГ. Ниже кратко рассмотрены некоторые возможности в этом направлении. Одна из таких возможностей связана с тем обстоятельством, что ряд специальных функций является базисами представлений групп (в некоторых случаях матрицами представлений). Базис специальных функций ничем в принципе не отличается от любого другого базиса, рассмотренного в этой главе. Поэтому для него справедливы все формулы разложения с помощью коэффициентов КГ. В частности, специальные функции, являющиеся базисом высшей группы, могут быть разложены по базису низшей группы (частным примером такого разложения является формула (2) в работе [4]). Здесь открывается путь создания с помощью теории коэффициентов КГ единой теории ортогональных полиномов. Коэффициенты при одинаковых степенях различных ортогональных многочленов будут отличаться друг от друга лишь комбинациями коэффициентов КГ определенных групп.

Вторая возможность связана с формулами типа [151, 152]

$$
\begin{aligned}
&(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm) = (-1)^{j_2+m_2} \times \\
&\times \left[\frac{(j+j_1-j_2)!\,(j_1+j_2-j)!\,(j-m)!\,(j_1-m_1)!\,(2j+1)}{(j-j_1+j_2)!\,(j_1+j_2+j+1)!\,(j+m)!\,(j_1+m_1)!\,(j_2-m_2)!\,(j_2+m_2)!}\right]^{1/2} \times \\
&\times \frac{(j+j_2+m_1)!}{(j_1-j_2-m)!}\,{}_3F_2(-j+j_1-j_2,\ j_1- \\
&-m_1+1,\ -j-m;\ j_1-j_2-m+1,\ -j-j_2-m_1;\ 1),
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

$$
\begin{aligned}
&W(abcd;ef) = \Delta(abe)\,\Delta(cde)\,\Delta(acf)\,\Delta(bdf) \times \\
&\times \Gamma\left[\begin{matrix} a+b+c+d+2 \\ a+b+1-e,\ c+d+1-e,\ a+c+1-f,\ b+d+1-f,\ e+ \\ +f+1-a-d,\ e+f+1-b-c \end{matrix}\right] \times \\
&\times {}_4F_3(e-a-b,\ e-c-d,\ f-c-a,\ f-b-d;\ -a-b- \\
&-c-d-1,\ e+f+1-a-d,\ e+f+1-b-c;\ 1),
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

где использованы обозначения:

$$
\Gamma\left(\begin{matrix} a,\ b\ \ldots \\ p,\ q\ \ldots \end{matrix}\right) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\ \ldots}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\ \ldots},
$$

$$
\Delta(xyz) = \left\{\Gamma\left[\begin{matrix} x+y+1-z,\ x+z+1-y,\ y+z+1-x \\ x+y+z+2 \end{matrix}\right]\right\}^{1/2}.
$$

Как видно из этих формул, все свойства коэффициентов КГ и Рака вытекают из свойств функций ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$. Могут быть записаны аналогичные соотношения и для других символов. Таким образом, в принципе теория угловых моментов формулируется на языке обобщенных гипергеометри-

ческих функций ${}_mF_n$ с аргументом единица. Из свойств соединений коэффициентов КГ вытекает ряд следствий для функций ${}_mF_n$, в частности можно использовать для получения новых соотношений симметрию Редже и симметрии $n \times n$-символов. К этому кругу вопросов примыкают и симметрии дифференциальных уравнений. Третья возможность связана с уже рассмотренными в § 5 гл. I конечно-разностными аналогами специальных функций. Особенно интересной является в некотором смысле слова обратная задача — построение теории коэффициентов КГ некомпактных групп. Этот переход от компактных групп к некомпактным является по существу переходом в функциях ${}_mF_n$ от частных аргументов к общим.

Таким образом, существуют тесные связи между коэффициентами КГ, с одной стороны, теорией специальных функций, алгебрами Ли и теорией дифференциальных уравнений — с другой. Эти связи до сих пор исследованы еще недостаточно.

ГЛАВА IV

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША — ГОРДАНА ВЫСШИХ ГРУПП

Данная глава посвящена конкретному построению коэффициентов КГ высших групп, преимущественно групп SU_n. В его основе лежит чисто алгебраическая процедура, имеющая значительные преимущества перед инфинитезимальным подходом. Получены прикладные расчетные формулы, разработана методика анализа соединений коэффициентов КГ.

§ 1. Базисные коэффициенты Клебша — Гордана

При конкретном построении коэффициентов КГ высших групп, как уже указывалось в § 1 гл. III, возникают существенные отличия от теории угловых моментов. В первую очередь они обусловлены кратными представлениями в ряду Клебша — Гордана. При наличии кратных представлений для их различения должен вноситься не содержащийся в группе дополнительный фактор, который зависит от конкретных условий задачи и подчас носит условный характер. Поэтому прежде всего нужно построить коэффициенты КГ, соответствующие ряду Клебша — Гордана, не содержащему кратных представлений. Такие коэффициенты определяются однозначно, и их табулирование имеет смысл. Табулирование же общего коэффициента КГ для высших групп так же неоправданно, как табулирование обобщенных коэффициентов КГ в теории угловых моментов. В работах [10, 11, 19] этот круг вопросов довольно подробно анализировался. Наиболее общие однозначные коэффициенты КГ были названы элементарными. Для группы SU_3 — это коэффициенты типа

$$\left\langle \begin{matrix} P'0 \\ \dots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P''Q'' \\ \dots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ \dots \end{matrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{matrix} 0Q' \\ \dots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P''Q'' \\ \dots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ \dots \end{matrix} \right\rangle, \tag{4.1}$$

$$\left\langle \begin{matrix} P'Q' \\ \dots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P''Q'' \\ \dots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P' + P''Q' + Q'' \\ \dots \end{matrix} \right\rangle. \tag{4.2}$$

В общем случае групп SU_n элементарными являются коэффициенты КГ, соответствующие произведению фундаментального представления D (P0... ... 0) на произвольное, а также коэффициенты КГ (типа (4.2)) со сложением сигнатур. Любые коэффициенты КГ строятся как соединения элементарных. Однако за основу практического построения коэффициентов КГ в в работах [10, 11, 20] были взяты так называемые фундаментальные ко-

эффициенты КГ, соответствующие основным операциям конструирования базисов неприводимых представлений: симметризации, антисимметризации, свертке, юнговскому умножению частного вида. Отметим, что юнговское умножение определяется как простое «сложение» схем Юнга

$$D(P_1 \ldots P_n) \times D(P_1' \ldots P_n') \to D(P_1 + P_1' \ldots P_n + P_n'). \tag{4.3}$$

Оно разбивается на более элементарные операции типа

$$D(P_1 0 \ldots 0) \times D(0 \ldots 0 P_k 0 \ldots 0) = D(P_1 0 \ldots 0 P_k 0 \ldots 0). \tag{4.4}$$

Для группы SU_3 к фундаментальным относятся соответственно коэффициенты

$$\begin{array}{llll} \text{а)} & \left\langle \begin{matrix} P_1 0 \\ \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2 0 \\ \ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P_1 + P_2 0 \\ \ldots \end{matrix} \right\rangle, & \text{в)} & \left\langle \begin{matrix} PQ \\ \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} QP \\ \ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 00 \\ \ldots \end{matrix} \right\rangle, \\ \text{б)} & \left\langle \begin{matrix} P0 \\ \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P0 \\ \ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 0P \\ \ldots \end{matrix} \right\rangle, & \text{г)} & \left\langle \begin{matrix} P0 \\ \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0Q \\ \ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ \ldots \end{matrix} \right\rangle. \end{array} \tag{4.5}$$

Более сложные коэффициенты КГ (в том числе и элементарные) строились как соединения фундаментальных. В работах [10, 11, 20] была развита алгебраическая и графическая техника соединений и показано, что все коэффициенты (4.5) могут быть представлены в виде произведения двух коэффициентов КГ группы SU_2. Последний результат независимо был получен в работе [66]. Отметим, что фундаментальный коэффициент (4.5 г) — это также коэффициент преобразования от симметрического базиса к каноническому. Возникает вопрос: какие коэффициенты КГ выбрать в общем случае за исходные, чтобы строить из них соединения. В данной работе (в отличие от [10, 20]) за исходные коэффициенты выбраны коэффициенты типа (на примере группы SU_3):

$$\text{а)} \left\langle \begin{matrix} P_1 0 \\ \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2 0 \\ \ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ \ldots \end{matrix} \right\rangle, \quad \text{б)} \left\langle \begin{matrix} P_1 0 \\ \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0Q_2 \\ \ldots \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ \ldots \end{matrix} \right\rangle, \tag{4.6}$$

являющиеся промежуточными между элементарными и фундаментальными (будем называть их базисными).

Такой выбор (при сохранении общей схемы работ [10, 20]) имеет свои преимущества. Как будет видно из дальнейшего, такие коэффициенты весьма просты и имеют чрезвычайно прозрачный смысл. Они соответствуют умножению строк схем Юнга. Кроме того, канонический и симметрический базисы для представлений D ($P0 \ldots 0$) совпадают, т. е. в этом случае канонический базис является прямым обобщением полиномиального базиса группы SU_2 и может быть непосредственно применен метод производящих инвариантов (в общем случае канонический базис носит сложный характер, см. § 3 гл. III). Запишем базисы для представлений рассматриваемого типа. Базис D (j) группы SU_2

$$\frac{(2j)!}{(j-m)!\,(j+m)!}\, u_1^{j-m} u_2^{j+m}. \tag{4.7}$$

Базис D ($P0$) группы SU_3 в схеме редукции $SU_3 \supset SU_2$

$$\frac{(2j)!}{(j-\nu)!\,(j+\nu)!}\,\frac{(2T)!}{(T-t)!\,(T+t)!}\, u_1^{j-\nu} u_2^{T-t} u_3^{T+t}. \tag{4.8}$$

При этом

$$2T = j + \nu. \tag{4.9}$$

Аддитивная величина ν имеет непосредственный смысл в полиномиальном базисе. Связь с гиперзарядом задается соотношением

$$Y = \nu - \frac{1}{3} j, \quad 2j = P. \tag{4.10}$$

Общее представление $D\,(PQ)$ характеризуется индексами j, j', ν, T, t. Для представления $D\,(P00)$ группы SU_4 в схеме редукции $SU_4 \supset SU_3 \supset \supset SU_2$ канонический базис имеет вид

$$\frac{(2j_1)!}{(j_1-\nu_1)!\,(j_1+\nu_1)!}\;\frac{(2j_2)!}{(j_2+\nu_2)!\,(j_2-\nu_2)!}\;\frac{2T}{(T-t)!\,(T+t)!}\,u_1^{j_1-\nu_1}u_2^{j_2-\nu_2}u_3^{T-t}u_4^{T+t}, \quad (4.11)$$

где

$$2T = j_2 + \nu_2, \qquad 2j_2 = j_1 + \nu_1. \quad (4.12)$$

Здесь уже три аддитивных числа $\nu_1\nu_2 t$.

Построение базисов в общем случае группы SU_n совершенно аналогично. Все эти базисы факторизованы по группе SU_2. Коэффициент Вигнера при сложении двух представлений является произведением коэффициентов Вигнера группы SU_2 и имеет вид (в символах Редже)

$$\left\|\begin{matrix} 2j_2-s & 2j_1-s & s-\sigma \\ j_1-\nu_1 & j_2-\nu_2 & j_1+j_2-s+(\nu_1+\nu_2)-\sigma \\ j_1+\nu_1-\sigma & j_2+\nu_2-\sigma & j_1+j_2-s-(\nu_1+\nu_2)+\sigma \end{matrix}\right\| \times$$
$$\times \left\|\begin{matrix} 2T_2-\sigma & 2T_1-\sigma & \sigma \\ T_1-t_1 & T_2-t_2 & T_1+T_2+(t_1+t_2)-\sigma \\ T_1+t_1 & T_2+t_2 & T_1+T_2-(t_1+t_2)-\sigma \end{matrix}\right\| \quad (4.13)$$

Соответствующий коэффициент КГ группы SU_3 равен произведению коэффициентов КГ группы SU_2

$$\left\langle \begin{matrix} 2j_1 0 \\ \nu_1 T_1 t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2j_2 0 \\ \nu_1 T_2 t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 2j_1+2j_2-2s & s \\ \nu_1+\nu_2 \;\; T_1+T_2-\sigma & t_1+t_2 \end{matrix} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \begin{matrix} j_1-\frac{\sigma}{2} \\ \nu_1-\frac{\sigma}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_2-\frac{\sigma}{2} \\ \nu_2-\frac{\sigma}{2} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_1+j_2-s \\ \nu_1+\nu_2-\sigma \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} T_1 \\ t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T_1+T_2-\sigma \\ t_1+t_2 \end{matrix} \right\rangle. \quad (4.14)$$

Совершенно аналогично можно записать коэффициенты Вигнера для любых групп SU_n. Коэффициенты Вигнера группы SU_3 (4.13) схематически представлены на рис. 18.

Здесь R означают общие элементы в разных символах Редже, ρ — индексы, являющиеся показателями полиномиальных базисов (4.8). Коэффициентам Вигнера группы SU_4 соответствует в тех же обозначениях рис. 18, *б*, коэффициентам Вигнера группы SU_5 — рис. 18, *в*. Все эти величины являются обычными обобщенными символами Вигнера классической теории угловых моментов (коэффициенты КГ рассматриваются с учетом поворота Редже, см. § 2 гл. II). Переход между различными схемами при стандартной редукции $SU_4 \supset SU_3 \supset SU_2$

$$x_1x_2x_3x_4,\; x_2x_3x_4,\; x_3x_4 \to x_1x_2x_3x_4,\; x_1x_2x_3,\; x_1x_2 \quad (4.15)$$

задается обычными трансформационными матрицами при фиксированной схеме связи.

Разным схемам редукции ($SU_4 \supset SU_3 \supset SU_2$ и $SU_4 \supset SU_2 \times SU_2 \supset \supset SU_2$) соответствуют разные схемы связи классической теории угловых моментов. Таким образом, математически одно и то же, что рассматривать сложение многих моментов в группе SU_2 и что рассматривать сложение двух представлений $D\,(P_1 0\ldots)$, $D\,(P_2 0\ldots)$ высших групп SU_n при различных схемах редукции. Этот факт представляется чрезвычайно интересным, характеризующим внутреннее единство теории коэффициентов КГ полупростых групп Ли. С другой стороны, данная симметрия может ока-

$$\times\left\|\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ R&R&\cdot\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R&R&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\end{matrix}\right\|\times$$

а

$$\times\left\|\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ R'&R'&\cdot\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R'&R'&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ R&R&\cdot\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R&R&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\end{matrix}\right\|$$

б

$$\times\left\|\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ R''&R''&\cdot\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R''&R''&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ R'&R'&\cdot\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R'&R'&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ R&R&\cdot\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R&R&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\\ \rho&\rho&\cdot\end{matrix}\right\|$$

в

$$\left\|\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&R\\ \cdot&\cdot&R\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ R&\cdot&R'\\ R&\cdot&R'\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ R'&\cdot&\cdot\\ R'&\cdot&\cdot\end{matrix}\right\|$$

г

$$\left\|\begin{matrix}\cdot&\cdot&R_1\\ \cdot&\cdot&R_1\\ R_1''&R_1''&\cdot\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R_1&\cdot&\cdot\\ R_1&\cdot&\cdot\\ \cdot&R_2''&R_2''\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R_1''&R_1''&R_2\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ R_1'&R_1'&R_2\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R_2&R_2''&R_2''\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ R_2&R_2'&R_2'\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}R_1'&R_1'&\cdot\\ \cdot&\cdot&R_3\\ \cdot&\cdot&R_3\end{matrix}\right\|\times\left\|\begin{matrix}\cdot&R_2'&R_2'\\ R_3&\cdot&\cdot\\ R_3&\cdot&\cdot\end{matrix}\right\|$$

д

Рис. 18. «Горизонтальные» и «вертикальные» соединения коэффициентов Вигнера

заться весьма существенной и для физических приложений. В частности, представляется перспективным ее использование в теории когерентных состояний многоуровневых систем (ср. § 5 гл. VI и [22]).

На рис. 18, *а*, *б*, *в* представлены по вертикали символы Редже, являющиеся стандартным соединением — обобщенным коэффициентом Вигнера для высших групп («вертикальное» соединение). Для SU_2 обобщенный коэффициент Вигнера — соединение трех символов Редже — представлен на рис. 18, *г*. Его можно назвать «горизонтальным» соединением. Симметрия «горизонтали» и «вертикали» является отражением физической симметрии — симметрии групп SU_n и симметрии совокупности n частиц. Полная теория коэффициентов КГ групп SU_n включает не только одну «вертикаль» или «горизонталь», но и соединения «прямоугольники», схематически представленные на рис. 18, *д* (ср. рис. 9).

Приведем здесь еще формулу коэффициентов КГ для произведения представлений $D\,(0P)\times D\,(0Q)$. Базис представления $Q\,(0Q)$ имеет вид

$$\frac{(2j_1)!}{(j_1-\nu_1)!\,(T+t)!\,(T-t)!}\,\xi_1^{j_1+\nu_1}\xi_2^{T-t}\xi_3^{T+t}=$$

$$=\frac{(2j_1)!}{(j_1-\nu_1)!\,(T+t)!\,(T-t)!}\begin{vmatrix}u_2&v_2\\u_3&v_3\end{vmatrix}^{j_1+\nu_1}\begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_3&v_3\end{vmatrix}^{T-t}\begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}^{T+t}=$$

$$=\sqrt{(J!)^3(J+1)}\left\|\begin{matrix}j_1+\nu_1&T-t&T+t\\ R_{21}&R_{22}&R_{23}\\ R_{31}&R_{32}&R_{33}\end{matrix}\right\|\frac{\prod\limits_i u_i^{R_{2i}}v_i^{R_{3i}}}{\left(\prod\limits_i R_{2i}!R_{3i}!(j_1+\nu_1)!(T-t)!(T+t)!\right)^{1/2}}. \tag{4.16}$$

Коэффициент Вигнера может быть записан так:

$$\left\|\begin{matrix} 2j_2+\varkappa+1-\alpha & 2j_1-\varkappa-\alpha & \alpha \\ j_1-\nu_1-\varkappa & j_2-\nu_2 & j_1+j_2+\nu_1+\nu_2+1+\varkappa-\alpha \\ j_1+\nu_1 & j_2+\nu_2+\varkappa+1 & j_1+j_2-\nu_1-\nu_2-\alpha-\varkappa \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} 2T_2-\varkappa & 2T_1-\varkappa & \varkappa \\ T_1-t_1 & T_2-t_2 & T_1+T_2+(t_1+t_2)-\varkappa \\ T_1+t_1 & T_2+t_2 & T_1+T_2-(t_1+t_2)-\varkappa \end{matrix}\right\| \tag{4.17}$$

Соответствующий коэффициент КГ

$$\left\langle \begin{matrix} 0 & 2j_1 \\ \nu_1 T_1 t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2j_2 & 0 \\ \nu_2 T_2 t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 2j_2-\alpha & 2j_2-\alpha \\ \nu_1+\nu_2 & T_1+T_2-\varkappa \quad t_1+t_2 \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} j_1-\frac{\varkappa}{2} \\ -\nu_1+\frac{\varkappa}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_2+{}^1/_2+\frac{\varkappa}{2} \\ -\nu_2+{}^1/_2+\frac{\varkappa}{2} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_1+j_2+{}^1/_2-\alpha \\ -\nu_1-\nu_2+{}^1/_2+\varkappa \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} T_1 \\ t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T_1+T_2-\varkappa \\ t_1+t_2 \end{matrix} \right\rangle. \tag{4.18}$$

Эти формулы можно получить согласно [10] и из соединения фундаментальных коэффициентов КГ. С другой стороны, фундаментальные коэффициенты являются частными случаями (4. 14) и (4. 18) и их численное значение находится из указанных формул при задании соответствующих параметров.

В принципе для построения теории коэффициентов КГ можно рассматривать схемы типа рис. 18, *д*. Однако эти вопросы требуют дальнейшего изучения. Общая же методика построения соединений коэффициентов КГ групп SU_n из базисных рассмотрена в следующем параграфе.

§ 2. Построение коэффициентов Клебша — Гордана

В этом параграфе рассмотрена последовательная алгебраическая методика построения коэффициентов КГ групп SU_n. Методика вычисления коэффициентов КГ в симметрическом базисе $M^{p_1p_2p_3}_{q_1q_2q_3}(x\xi)$ была развита в работах [5, 6]. Конкретные расчетные формулы приведены в работе [21], помещенной в настоящем сборнике, поэтому ниже ограничимся только некоторыми принципиальными моментами, связанными с нахождением коэффициентов КГ. Методика основана на разложении производящего инварианта (см. § 4 гл. I), включающего в себя все инвариантные комбинации, построенные из компонент базисов трех неприводимых представлений. Например, для группы SU_3 имеем следующее разложение:

$$(\alpha^i x_i)^{P'+s_1-u}(\alpha^i y_i)^{P''-s_1-v}(a_i\xi^i)^{Q'-s_2-v}(a_i\eta^i)^{Q''-s_2-u} \times$$

$$\times (x_i\eta^i)^u (y_i\xi^i)^v (a_r\varepsilon^{rik}x_iy_k)^{s_1}(\alpha^i\varepsilon_{ikl}\xi^k\eta^l)^{s_2} =$$

$$= \sum_{\substack{p_1'q_1'p_1''q_1''p_1q_1}} M^{p_1'p_2'p_3'}_{q_1'q_2'q_3'}(x\xi)\, M^{p_1''p_2''p_3''}_{q_1''q_2''q_3''}(y\eta)\, M^{q_1q_2q_3}_{p_1p_2p_3}(a\alpha) \left(\begin{matrix} p_1' & p_2' & p_3' \\ p_1'' & p_2'' & p_3'' \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} q_1' & q_2' & q_3' \\ q_1'' & q_2'' & q_3'' \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix}\right), \tag{4.19}$$

где

$$P = Q' + Q'' - v - u - 2s_2 + s_1 = \sum_i p_i,$$

$$Q = P' + P'' - v - u - 2s_1 + s_2 = \sum_i q_i. \tag{4.20}$$

Линейно-независимыми будут инварианты, для которых либо $s_1 = 0$, либо $s_2 = 0$. Ненормированное выражение симметрического коэффициента Вигнера, стоящего справа, получается при раскрытии производящего инварианта и сборе всех членов с одинаковыми степенями a_i, y_i, x_i, ξ^i, α^i, η^i. Процедура нахождения симметрических коэффициентов КГ для более высоких групп SU_n аналогична. Например, для произведения представлений $D\,(P_1Q_10) \times D\,(P_2Q_20)$ группы SU_4 выражение симметрического коэффициента Вигнера определяется из разложения производящего полинома

$$(a^i x_i)^{P'} (b^{ik} \alpha_{ik})^{Q'} (a^i y_i)^{P''} (b^{ik} \beta_{ik})^{Q''} (\varepsilon_{iklm} c_i \alpha_{kl} y_m)^{s_0} \times$$
$$\times (\varepsilon_{iklm} c_i \beta_{kl} x_m)^{s_1} (\varepsilon_{iklm} \alpha_{ik} \beta_{lm})^{s_2} (b^{ik} x_i y_k)^{s_1} \times$$
$$\times (\varepsilon_{iklm} c_i \alpha_{kl} \beta_{mn} a^n)^{T_1} (\varepsilon_{iklm} c_i \alpha_{kl} \beta_{mn} b^{nr} x_r)^{T_2} (x_i b^{ik} \alpha_{kl} a^l)^{T_3}. \qquad (4.21)$$

Конкретные выражения симметрических коэффициентов содержатся в [21]. Из них автоматически следуют допустимые значения сигнатуры третьего представления, т. е. ряд Клебша — Гордана.

Зная коэффициент КГ симметрического базиса, можно с помощью формул перехода (3.37) найти соответствующий коэффициент КГ для канонического базиса. Так, например, для коэффициентов КГ группы SU_3 в каноническом базисе имеем

$$\left\langle \begin{matrix} P'Q' \\ Y_1T_1t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P''Q'' \\ Y_2T_2t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} QP \\ -YT-t \end{matrix} \right\rangle = \sum_{Y_0T_0t_0} \left\langle \begin{matrix} PQ \\ Y_0T_0t_0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} QP \\ -YT-t \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 00 \\ 000 \end{matrix} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} P'Q' \\ Y_1T_1t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P''Q'' \\ Y_2T_2t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ Y_0T_0t_0 \end{matrix} \right\rangle = \rho \sum_{p_i', p_i'', q_i', q_i'', p_i, q_i} \left\langle \begin{matrix} \frac{p_1+p_2}{2} \\ \frac{p_1-p_2}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{q_1+q_2}{2} \\ \frac{q_2-q_1}{2} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T \\ t \end{matrix} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} \frac{p_1'+p_2'}{2} \\ \frac{p_1'-p_2'}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{q_1'+q_2'}{2} \\ \frac{q_2'-q_1'}{2} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T_1 \\ t_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \frac{p_1''+p_2''}{2} \\ \frac{p_1''-p_2''}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{q_1''+q_2''}{2} \\ \frac{q_2''-q_1''}{2} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T_2 \\ t_2 \end{matrix} \right\rangle \times$$
$$\times \Phi \begin{pmatrix} PQ \\ YT\varkappa \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} P'Q' \\ Y_1T_1\varkappa_1 \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} P'Q' \\ Y_2T_2\varkappa_2 \end{pmatrix} (-1)^{p_1+q_1'+q_1''} \left(\begin{matrix} p_1' & p_2' & p_3' \\ p_1'' & p_2'' & p_3'' \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} q_1' & q_2' & q_3' \\ q_1'' & q_2'' & q_3'' \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \right) \qquad (4.22)$$

Нормировочный множитель ρ определяется из условия ортонормированности канонического базиса $D\,(PQ)$ при ортонормированности канонических базисов $D\,(P'Q')$ и $D\,(P''Q'')$. Нормируя старший вектор $D\,(PQ)$ (коэффициент при $a_2^Q\,(a_1)^P$ в (4.19), для которого $Y = {}^1/_3\,(P - Q)$, $T = {}^1/_2\,(P + Q)$, $t = {}^1/_2\,(P + Q)$), можно найти выражение для ρ^2. Общее выражение для нормировки весьма громоздко (см. [21]), хотя для ряда частных случаев сильно упрощается. Несмотря на то, что рассмотренная методика вычисления нормированных коэффициентов КГ является алгоритмически замкнутой и пригодной для машинных расчетов, предпочтительней другой метод вычисления общих коэффициентов КГ. В нем более четко видна структура коэффициентов КГ и трансформационных матриц, что дает возможность последовательного построения любых коэффициентов КГ. Его сущность можно видеть уже на примере группы SU_2. В этом случае производящий инвариант, построенный из трех спиноров, имеет

вид [31]

$$a_0 = \rho\,(u_2v_3 - u_3v_2)^{A_1}(u_3v_1 - u_1v_3)^{A_2}(u_1v_2 - u_2v_1)^{A_3} =$$

$$= \rho \sum_{\nu_i m_i} \left\langle \begin{matrix} \frac{A_1}{2} \\ \nu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_1}{2} \\ -\nu_1 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \frac{A_2}{2} \\ \nu_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_2}{2} \\ -\nu_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \frac{A_3}{2} \\ \nu_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_3}{2} \\ -\nu_3 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \left[\prod_{i=1}^{3} (A_i + 1)\right]^{1/2} \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \frac{A_1}{2} \\ -\nu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_2}{2} \\ \nu_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_3 \\ m_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \frac{A_2}{2} \\ -\nu_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_3}{2} \\ \nu_3 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_1 \\ m_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \frac{A_3}{2} \\ -\nu_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_1}{2} \\ \nu_1 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} j_2 \\ m_2 \end{matrix} \right\rangle \prod_{i=1}^{2} \Psi^{j_i}_{m_i}. \qquad (4.23)$$

Здесь

$$\Psi^{j_i}_{m_i} = \left[\frac{(2j_i)!}{(j_i - m_i)!\,(j_i + m_i)!}\right]^{1/2} u_i^{j_i+m_i} v_i^{j_i-m_i}, \qquad i = 1, 2, 3; \quad j_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{3} A_k - A_i\right).$$

Подставляя численные значения метрического тензора и сравнивая с обычным определением коэффициентов Вигнера, имеем

$$\left\langle \begin{matrix} j_1 \\ m_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_2 \\ m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_3 \\ m_3 \end{matrix} \right\rangle = \rho^* \sum_{\nu_i} (-1)^{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{A_i}{2} + \nu_i\right)} \left\langle \begin{matrix} \frac{A_1}{2} \\ \nu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_2}{2} \\ -\nu_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_3 \\ m_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \frac{A_2}{2} \\ \nu_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_3}{2} \\ -\nu_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_1 \\ m_1 \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \frac{A_3}{2} \\ \nu_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{A_1}{2} \\ -\nu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_2 \\ m_2 \end{matrix} \right\rangle, \qquad \rho^* = \rho\left[\prod_i (2j_i + 1)\right]^{1/2}. \qquad (4.24)$$

Возведем в квадрат обе части (4.24) и просуммируем по свободным проекциям, тогда условие ортонормированности дает

$$\frac{1}{|\rho^*|} = \left| \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \frac{A_1}{2} & \frac{A_2}{2} & \frac{A_3}{2} \end{pmatrix} \right|, \qquad (4.25)$$

где справа обычный $6j$-символ.

Таким образом, зная производящий инвариант и частные виды коэффициентов КГ, можно сразу написать любой нормированный коэффициент КГ (или обобщенный коэффициент КГ). Квадрат трансформационной матрицы, определяющий нормировку, выражается через частные виды коэффициентов КГ. В случае, например, производящего инварианта

$$\rho\,(\alpha^i x_i)^{P'-Q''-s}(\alpha^i y_i)^{P''-s}(x_i\eta^i)^{Q''}(a_r\varepsilon^{rik}x_iy_k)^s$$

группы SU_3 коэффициент Вигнера представляется следующей суммой (коэффициенты КГ (Вигнера) записаны в символическом виде, т. е. опускаем соответствующие YTt):

$$\rho \sum \langle P' - Q'' - S0 \,|\, 0\,P' - Q'' - S \,|\, 00\rangle \langle P'' - S\,0 \,|\, 0\,P'' - S\;\; 00\rangle \times$$
$$\times \langle Q''0 \,|\, 0Q'' \,|\, 00\rangle \langle S0 \,|\, S0 \,|\, S0\rangle \langle P'' - S0 \,|\, S0 \,\|\, P''0\rangle \times$$
$$\times \langle P' - Q'' - S0 \,|\, Q''0 \,\|\, P' - S0\rangle \langle P' - S0 \,|\, S0 \,\|\, P'0\rangle \langle P''0 \,|\, 0Q'' \,|\, P''Q''\rangle \times$$
$$\times \langle 0P' - Q'' - S \;|\; 0P'' - S \;\|\; 0P' + P'' - 2S - Q''\rangle \langle S0 \;|\; 0P' + P'' - 2S -$$
$$- Q'' \,\|\, SP' + P'' - 2S - Q''\rangle. \qquad (4.26)$$

Числу $1/\rho^2$ соответствует трансформационная матрица группы SU_3, получаемая возведением (4.26) в квадрат и суммированием по всем свободным индексам. Этот алгоритм пригоден для вычисления любого нормированного коэффициента КГ групп SU_n.

Наряду с нормировкой весьма существен вопрос определения фазы. Поскольку коэффициенты КГ групп SU_n тесно связаны друг с другом [11],

вопрос о рациональном выборе фазового множителя требует специального исследования. Здесь для определения фазы используется обобщенное условие Кондона — Шортли [31, 53]. Коэффициент КГ считается действительным: общая фаза фундаментальных коэффициентов КГ дается условием

$$\left\langle \begin{matrix} P'Q' \\ \frac{P'-Q'}{3}\ \frac{P'+Q'}{2}\ \frac{P'+Q'}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P''Q'' \\ Y_2T_2t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ \frac{P-Q}{3}\ \frac{P+Q}{2}\ \frac{P+Q}{2} \end{matrix} \right\rangle > 0. \qquad (4.27)$$

Рассмотренный метод построения коэффициентов КГ с помощью производящих инвариантов является достаточно общим. Все промежуточные вычисления проводились в симметрическом базисе. Однако с помощью формул перехода (3.37) и производящего инварианта можно записывать соединения коэффициентов КГ непосредственно в каноническом базисе. Рассмотренная алгебраическая техника может быть переведена на язык графиков. Графический метод построения коэффициентов КГ и их соединений для любых групп SU_n, позволяющий формализовать расчеты, был развит в работе [10] и подробно рассмотрен в [21].

§ 3. Симметрические коэффициенты Клебша — Гордана и $n \times n$-символы

Коэффициенты КГ группы SU_n в симметрическом базисе, являясь необходимым промежуточным этапом в построении канонических коэффициентов КГ (см. § 2 этой главы), имеют большое самостоятельное значение. Полученные в § 2 формулы в виде громоздких сумм произведений факториалов дают сравнительно мало информации об их свойствах. В данном параграфе будет показано, что симметрические коэффициенты КГ тесным образом связаны с $n \times n$-символами, введенными гл. I. Преимуществом записи через $n \times n$-символы является возможность использования всех результатов обобщенной теории угловых моментов, в том числе высокой симметрии $n \times n$-символов, рекуррентных соотношений и т. п.

Как отмечалось в гл. III, свертка сопряженных представлений в симметрическом базисе обладает очень высокой симметрией. Она может быть представлена в виде произведений $n \times n$-символов. Но свертка — лишь частный симметрический коэффициент КГ. В любом случае изучению общих коэффициентов КГ и их соединений для групп SU_n должен предшествовать анализ всевозможных инвариантов.

Полный список базисных инвариантов групп SU_n состоит из величин типа [51]

$$(\varepsilon^{ikl\ldots} u_{1i} u_{2k} u_{3l} \ldots)^J,\ (\delta_i^k u_k \xi^i)^{J'},\ (\varepsilon_{ikl\ldots} \xi^{1i} \xi^{2k} \xi^{3l} \ldots)^{J''}. \qquad (4.28)$$

Здесь u_{1i}, u_{2k} ... — ковариантные векторы, ξ^{1i}, ξ^{2k} ... — контравариантные векторы. Отнюдь не все инварианты (4.28) являются независимыми. Соотношения между ними были подробно рассмотрены Вейлем [51] (см. также § 1 гл. I). Поэтому выбор производящих инвариантов при построении коэффициентов КГ может быть произведен различными способами. Именно этот выбор при наличии кратных представлений и предопределяет способ связи. При отсутствии кратных представлений в ряду Клебша — Гордана симметрические коэффициенты КГ строятся единственным образом. Производящий инвариант для коэффициента Вигнера группы SU_3 может быть представлен в виде

$$(\varepsilon^{iklm} x_i y_k z_l \underline{t}_m)^J\ (\varepsilon_{i'k'l'm'} \xi^{i'} \eta^{k'} \varphi^{l'} \underline{\tau}^{m'})^{J'}\ (\delta_\mu^\mu)^B. \qquad (4.29)$$

Здесь латинские индексы пробегают все значения 1, 2, 3, 4; подчеркнутые латинские — одно значение 1, а греческие — все остальные 2, 3, 4.

Производящий инвариант для коэффициента Рака группы SU_3 может быть записан в форме

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon^{k_1l_1m_1n_1}u_{1\underline{k_1}}u_{\underline{2l_1}}u_{\underline{3m_1}}u_{\underline{4n_1}})^{J_1}(\varepsilon_{k_1l_1m_1n_1}\xi^{\underline{1k_1}}\xi^{\underline{2l_1}}\xi^{\underline{3m_1}}\xi^{\underline{4n_1}})^{J_1'}\times\\
&\times(\varepsilon^{k_2l_2m_2n_2}u_{1\underline{k_2}}u_{\underline{2l_2}}u_{\underline{3m_2}}u_{\underline{4n_2}})^{J_2}(\varepsilon_{k_2l_2m_2n_2}\xi^{\underline{1k_2}}\xi^{\underline{2l_2}}\xi^{\underline{3m_2}}\xi^{\underline{4n_2}})^{J_2'}\times\\
&\times(\varepsilon^{k_3l_3m_3n_3}u_{1\underline{k_3}}u_{\underline{2l_3}}u_{\underline{3m_3}}u_{\underline{4n_3}})^{J_3}(\varepsilon_{k_3l_3m_3n_3}\xi^{\underline{1k_3}}\xi^{\underline{2l_3}}\xi^{\underline{3m_3}}\xi^{\underline{4n_3}})^{J_3'}\times\\
&\times(\varepsilon^{k_4l_4m_4n_4}u_{1\underline{k_4}}u_{\underline{2l_4}}u_{\underline{3m_4}}u_{\underline{4n_4}})^{J_4}(\varepsilon_{k_4l_4m_4n_4}\xi^{\underline{1k_4}}\xi^{\underline{2l_4}}\xi^{\underline{3m_4}}\xi^{\underline{4n_4}})^{J_4'}\times\\
&\times(\delta^{\nu_1'}_{\nu_1})^{B_{11}}(\delta^{\nu_2'}_{\nu_2})^{B_{12}}(\delta^{\nu_3'}_{\nu_3})^{B_{13}}(\delta^{\nu_4'}_{\nu_4})^{B_{14}}(\delta^{\mu_1'}_{\mu_1})^{B_{21}}(\delta^{\mu_2'}_{\mu_2})^{B_{22}}(\delta^{\mu_3'}_{\mu_3})^{B_{23}}(\delta^{\mu_4'}_{\mu_4})^{B_{24}}(\delta^{\mu_5'}_{\mu_5})^{B_{25}}\times\\
&\times(\delta^{\lambda_1'}_{\lambda_1})^{B_{31}}(\delta^{\lambda_2'}_{\lambda_2})^{B_{32}}(\delta^{\lambda_3'}_{\lambda_3})^{B_{33}}(\delta^{\lambda_4'}_{\lambda_4})^{B_{34}}(\delta^{\lambda_5'}_{\lambda_5})^{B_{35}}(\delta^{\varkappa_1'}_{\varkappa_1})^{B_{41}}(\delta^{\varkappa_2'}_{\varkappa_2})^{B_{42}}(\delta^{\varkappa_3'}_{\varkappa_3})^{B_{43}}(\delta^{\varkappa_5'}_{\varkappa_5})^{B_{45}}.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Производящий инвариант для коэффициента Вигнера группы SU_4 имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon_{i_1k_1l_1m_1n_1}\xi^{1i_1}\xi^{2k_1}\xi^{3l_1}\xi^{\underline{4m_1}}\xi^{\underline{5n_1}})^{J_1}(\varepsilon^{i_2k_2l_2m_2n_2}u_{1i_2}u_{2k_2}u_{3l_2}u_{\underline{4m_2}}u_{\underline{5n_2}})^{J_2}\times\\
&\times(\varepsilon^{i_3k_3l_3m_3n_3}\varepsilon^{i_4k_4l_4m_4n_4}a_{1i_3i_4}a_{2k_3k_4}a_{3l_3l_4}v_{\underline{1m_3}}v_{\underline{2n_3}}v_{\underline{3m_4}}v_{\underline{4n_4}})^{J_3}\times\\
&\times(\delta^{\mu_2}_{\mu_1})^{B_1}(\delta^{\nu_4}_{\nu_1})^{B_2}(\varepsilon_{\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4})^{B_3}.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Производящий инвариант для коэффициента Вигнера группы SU_5

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon^{i_1k_1l_1m_1n_1r_1}x_{1i_1}x_{2k_1}x_{3l_1}x_{\underline{4m_1}}x_{\underline{5n_1}}x_{\underline{6r_1}})\times\\
&\times(\varepsilon^{i_2k_2l_2m_2n_2r_2}\varepsilon^{i_3k_3l_3m_3n_3r_3}a_{1i_2i_3}a_{2k_2k_3}a_{3l_2l_3}u_{\underline{1m_2}}u_{\underline{2n_2}}u_{\underline{3r_2}}u_{\underline{4m_3}}u_{\underline{5n_3}}u_{\underline{6r_3}})^{J_2}\times\\
&\times(\varepsilon_{i_4k_4l_4m_4n_4r_4}\varepsilon_{i_5k_5l_5m_5n_5r_5}\alpha^{1i_4i_5}\alpha^{2k_4k_5}\alpha^{3l_4l_5}v_{\underline{1m_4}}v_{\underline{2n_4}}v_{\underline{3r_4}}v_{\underline{4m_5}}v_{\underline{5n_5}}v_{\underline{6r_5}})^{J_3}\times\\
&\times(\varepsilon^{i_6k_6l_6m_6n_6r_6}\xi^{1i_6}\xi^{2k_6}\xi^{3l_6}\xi^{\underline{4m_6}}\xi^{\underline{5n_6}}\xi^{\underline{6r_6}})^{J_4}\times\\
&\times(\delta^{\mu_6}_{\mu_1})^{B_1}(\delta^{\nu_6}_{\nu_2})^{B_2}(\delta^{\nu_5}_{\nu_1})^{B_3}(\delta^{\rho_4}_{\rho_2}\delta^{\rho_5}_{\rho_3})^{B_4}(\varepsilon_{\rho_1\mu_2\mu_3\mu_4})^{B_5}(\varepsilon^{\rho_6\mu_4\nu_4\mu_5})^{B_6}.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Совершенно аналогично могут быть выписаны производящие инварианты для коэффициентов Вигнера любой группы SU_n и любой трансформационной матрицы группы SU_n.

С помощью производящих инвариантов и их разложений легко получить соответствующие выражения для коэффициентов Вигнера и их соединений для групп SU_n. Если базис представлений SU_2, SU_3, SU_4 выбран согласно (3.35), то, обозначая индексы $p_iq_ir_i$, относящиеся к первому, второму и третьему представлению, соответственно p_i^1, q_i^1, r_i^1; p_i^2, q_i^2, r_i^2, p_i^3 q_i^3, r_i^3, имеем следующие выражения для коэффициентов Вигнера через $n\times n$-символы:

$$
SU_2:\quad \left\|\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3\\ p_1^1 & p_1^2 & p_1^3\\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3\end{matrix}\right\| \tag{4.33}
$$

$$
SU_3:\quad \sum_{x_1x_2x_3}\left\|\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 & x_1\\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 & x_2\\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 & x_3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_3\\ q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 & x_1\\ q_2^1 & q_2^2 & q_3^3 & x_2\\ q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 & x_3\end{matrix}\right\| \tag{4.34}
$$

$$SU_4: \quad \sum_{x_k^1 y_k^1 z_k^1} \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 & x_1^1 & x_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 & x_2^1 & x_2^2 \\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 & x_3^1 & x_3^2 \\ p_4^1 & p_4^2 & p_4^3 & x_4^1 & x_4^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 & x_1^4 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 & x_2^4 \\ y_2^1 & y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 & x_3^4 \\ y_4^1 & y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 & x_4^4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ z_1^1 & z_1^2 & z_1^3 & x_1^5 & x_1^6 \\ z_2^1 & z_2^2 & z_2^3 & x_2^5 & x_2^6 \\ z_3^1 & z_3^2 & z_3^3 & z_3^5 & x_3^6 \\ z_4^1 & z_4^2 & z_4^3 & x_4^5 & x_4^6 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \\ q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 & x_1^1 & x_1^6 \\ q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 & x_2^1 & x_2^6 \\ q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 & x_3^1 & x_3^6 \\ q_4^1 & q_4^2 & q_4^3 & x_4^1 & x_4^6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\ x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 \\ x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & x_3^5 \\ x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 & x_4^5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1^1 & y_2^1 & y_3^1 & y_4^1 \\ z_1^1 & z_2^1 & z_3^1 & z_4^1 \\ \hline q_{12}' q_{13}' q_{14}' q_{23}' q_{24}' & & & q_{34}' \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 \\ \hline q_{12}^2 q_{13}^2 q_{14}^2 q_{23}^2 q_{24}^2 & & & q_{34}^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 & y_4^3 \\ z_1^3 & z_2^3 & z_3^3 & z_4^3 \\ \hline q_{12}^3 q_{13}^3 q_{14}^3 q_{23}^3 q_{24}^3 & & & q_{34}^3 \end{Vmatrix} \tag{4.35}$$

Здесь A_i, B_i, C_i, D_i — определенные линейные комбинации индексов представлений. Символ $\begin{Vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\ R_1' & R_2' & R_3' & R_4' \\ \hline q_{12} q_{13} q_{14} q_{23} q_{24} q_{34} \end{Vmatrix}$ означает, что производится суммирование по всем значениям k_i, удовлетворяющим условиям $\sum R_i + R_i' = \sum R_k + R_k' = \sum R_i + R_k = \sum R_i' + R_k' = q_{ik}$. Для более высоких групп возникают естественные обобщения этого символа, связанные с тем, что компоненты симметрического базиса содержат миноры более высокого порядка.

Нетрудно выписать формулы и для коэффициента Рака группы SU_3 и коэффициента Вигнера группы SU_5. Все они выражаются через $n \times n$-символы.

Формулы типа (4.33) — (4.35) удобны тем, что в них непосредственно входят индексы представлений p_i^k, q_i^k, r_i^k, сразу видны все правила симметрии, могут быть найдены численные значения и построены наглядные графические методы.

Наряду с рассмотренным выше способом связи можно применять и другие способы. Соответствующие им коэффициенты КГ также записываются в виде сумм произведений $n \times n$-символов, задаваемых разложением производящих полиномов (коэффициенту Вигнера соответствует производящий инвариант). Рассмотрим обычный последовательный способ соединения (ср. § 2 настоящей главы).

В табл. 1 записаны фундаментальные операции в группах SU_2 и SU_3 и соответствующие разложения $D_1 \times D_2 \to D_3$. Для сравнения приведены производящие инварианты в форме § 2. В целях компактности производящий полином записывается чисто символически (опускаются показатели детерминантов и используется суммирование по части индексов). Так, символическая запись коэффициентов при степенях величин (u_i, v_i. . .), входящих в (1.52), (1.53), имеет вид

$$\varepsilon^{ikl} c_{ij} \varepsilon^{i'k'l'}, \quad \varepsilon^{ikl} e_{mrs}. \tag{4.36}$$

Таблица 1

Группа	Основные операции	$D_s \times D_s \to D_s$	Производящий полином	Инвариант
SU_2	Симметризация	$D_{j_1} \times D_{j_2} \to D_{j_1+j_2}$	$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{jl'}x_i y_k$	$(u^i x_i)^{P'}(u^i y_i)^{P''}$
	Альтернирование (свертка)	$D_j \times D_j \to D_0$	$\varepsilon_{ik}\varepsilon^{kl}x_l y^i$	$(x_i y^i)^P,\ P = 2j$
SU_3	Симметризация	$D(P'0) \times D(P''0) \to D(P' + P''0)$	$\varepsilon^{iklm}\varepsilon_{lmn}x_i y_k$	$(\alpha^i x_i)^{P'}(\alpha^i y_i)^{P''}$
	Альтернирование	$D(P0) \times D(P0) \to D(0P)$	$\varepsilon^{ikl}x_i y_k$	$[axy]^P$
	Свертка	$D(P0) \times D(0P) \to D(00)$	$\varepsilon^{ilm}\varepsilon_{lmn}x_i\eta^n$	$(\eta^i x_i)^P$
	Юнговское умножение	$D(P0) \times D(0Q) \to D(PQ)$	$x_i\eta^k$	$(\alpha^i x_i)^P(a_i\eta^i)^Q$

Таблица 2

$D_s \times D_s \to D_s$	Производящий полином	Инвариант
$D(P'0) \times D(P''0) \to D(PQ)$	$\varepsilon^{iklm}\varepsilon_{lmn}\varepsilon^{l'k'l''}x_{i'}y_{k'}x_i y_k$	$(\alpha^i x_i)^{P'-Q}(\alpha^i y_i)^{P''-Q}[axy]^Q$
$D(P0) \times D(0Q) \to D(P-uQ-u)$	$\varepsilon^{iklm}\varepsilon_{kln}\varepsilon_{k'l'm'n'}\varepsilon^{i'k'l'}x_i\eta^n x_i\eta^{k'}$	$(\alpha^i x_i)^{P-u}(a_i\eta^i)^{Q-u}(x_i\eta^i)^u$
$D(P_1Q_1) \times (P_20) \to D(PQ)$	$\varepsilon^{i_1k_1l_1m_1}\varepsilon_{k_1l_1n_1}\varepsilon^{iklm}\varepsilon^{i'k'l'}x_{i_1}\eta^{n_1}x_i y_k$	$(\alpha^i y_i)^A(\alpha^i x_i)^B(x_i\eta^i)^C(a_i\eta^i)^D[axy]^E$

В последнем случае в ε^{iklm} каждый индекс пробегает значения 0,1,2,3 в $e_{mrs} = 1, 2, 3$, суммирование проводится по значениям $n = 1, 2, 3$. Величина $[axy]$ в табл. 1 означает определитель, составленный из компонент соответствующих векторов.

Более общие коэффициенты КГ, являющиеся соединениями фундаментальных, также могут быть построены с помощью производящих полиномов. Примеры приведены в табл. 2. Совершенно аналогично выписываются производящие полиномы для коэффициентов КГ более высоких групп. Несколько примеров приведено в табл. 3. Разлагая производящие полиномы, приведенные в таблицах, по симметрическому базису, получаем выражения для коэффициентов КГ через $n \times n$-символы.

Таблица 3

Группа	Операция	$D_1 \times D_2 \to D_3$	Производящий полином
SU_4	Симметризация	$D(P'00) \times D(P''00) \to D(P' + P''00)$	$\varepsilon^{iklm} e_{lmnr} x_i y_k$
	Альтернирование	$D(P00) \times D(P00) \to D(0P0)$	$\varepsilon^{iklm} x_i y_n$
	Свертка	$D(P00) \times D(00P) \to D(000)$,	$\varepsilon^{iklm} e_{klmn} x_i \xi''$
		$D(0Q0) \times D(0Q0) \to D(000)$	$\varepsilon^{iklm} b_{ik} b_{lm}$
SU_5	Симметризация	$D(P'000) \times D(P''000) \to D(P' + P''000)$	$\varepsilon^{iklmnr} e_{lmnrs} x_i y_k$

Основное преимущество здесь состоит в стандартности подхода по всем группам SU_n. Отметим, что, разлагая $n \times n$-символы на 3×3-символы, можно представить коэффициенты КГ группы SU_n в виде суммы произведений коэффициентов КГ группы SU_2. Нормируя производящие инварианты, приведенные в таблицах, можно получить нормированные коэффициенты КГ. Исходным пунктом при вычислении нормировки производящих инвариантов является определение скалярных произведений базисных функций фундаментальных неприводимых представлений групп SU_n (в отличие от формул гл. III здесь непосредственно нормируются производящие инварианты). Определим для D (P0 . . . 0) скалярные произведения в виде

$$\left(\left[\frac{P!}{\prod\limits_i p_i!}\right]^{1/2} \prod_i a_i^{p_i}, \left[\frac{P'!}{\prod\limits_i p_i'!}\right]^{1/2} \prod_i a_i^{p_i'}\right) = \prod_{i=1} \delta_{p_i p_i'}. \tag{4.37}$$

Нормируя инвариант $I = \rho\,(a_i \xi^i)^P$ на единицу и считая, что (4.37) справедливо для полиномов как от a_i, так и от ξ^i, получаем

$$I = \left[\frac{(P + n - 1)!}{P!\,(n-1)!}\right]^{-1/2} (a_i \xi^i)^P. \tag{4.38}$$

Если $\xi^i = \varepsilon^{ikl} x_k y_l$, $(n = 3)$, то найдем соотношение

$$\left(\left[\frac{P!}{\prod\limits_i p_i!}\right]^{1/2} \prod_i (\xi^i)^{p_i}, \left[\frac{P'!}{\prod\limits_i p_i'!}\right]^{1/2} \prod_i (\xi^i)^{p_i'}\right) = (P + 1)\,\delta_{p_i p_i'}, \tag{4.39}$$

где для полиномов x_k (y_k) скалярные произведения определяются формулами (4.37).

Тогда нормированный на единицу инвариант $T = \rho\,(\varepsilon^{ikl} a_i x_k y_l)^P$ имеет вид

$$I = \left[\frac{(P+2)!\,(P+1)}{P!\,P!\,2!\,1!}\right]^{-1/2} (\varepsilon^{ikl} x_k y_l a_i)^P. \tag{4.40}$$

В общем случае произвольного n имеем:

а) нормированный на единицу инвариант I равен

$$\left[\frac{\prod\limits_{S=1}^{n-1} (P+S)\,!}{\prod\limits_{S=1}^{n-1} S!\,(P!)^{n-1}}\right]^{-1/2} (\varepsilon^{i_1 \ldots i_n} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_n}^{(n)})^P, \tag{4.41}$$

б) для базисных функций $D\,(0 \ldots 0\,Q)$ справедливо соотношение

$$\left(\left[\frac{Q!}{\prod\limits_i q_i!}\right]^{1/2} \prod_i (\xi^i)^{q_i}, \left[\frac{Q!}{\prod\limits_i q_i'!}\right] \prod_i (\xi^i)^{q_i'}\right) = \prod_i \delta_{q_i q_i'} \left[\frac{\prod\limits_{S=0}^{n-2} (Q+S)\,!}{\prod\limits_{S=0}^{n-2} S!\,(Q!)^{n-1}}\right], \tag{4.42}$$

где $\xi^i = \varepsilon^{i i_2 \ldots i_n} x_{i_2}^{(1)} \ldots x_{i_n}^{(n-1)}$.

Разлагая инвариант (4.41) с помощью $n \times n$-символов (которые с точностью до нормировки являются коэффициентами Вигнера n-го ранга группы SU_n,), получаем

$$\sum_{\Sigma R_{ik} = J} \{\!\| R_{ik}^{(n)} \|\!\}^2 = \left[\frac{\prod\limits_{S=1}^{n-1} (P+S)\,!}{\prod\limits_{S=1}^{n-1} S!\,(P+1)!\,P!}\right]. \tag{4.43}$$

Из (4.42) следует соотношение ортонормированности

$$\sum_{R_{ik}} \begin{Vmatrix} q_1 & \ldots & q_n \\ R_{21} & \ldots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & \ldots & R_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} q_1' & \ldots & q_n' \\ R_{21} & \ldots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & \ldots & R_{nn} \end{Vmatrix} = \prod_i \delta_{q_i q_i'} \left[\frac{\prod\limits_{S=1}^{n-2} (Q+S)\,!}{\prod\limits_{S=1}^{n-2} S!\,(Q+1)\,!}\right]. \tag{4.44}$$

Эти соотношения определяют нормировку коэффициентов КГ и их соединений в симметрическом базисе. Основное удобство рассмотренного здесь сведения теории коэффициентов КГ групп SU_n к $n \times n$-символам заключается в возможности проведения промежуточных расчетов в общем виде и исследования ряда прикладных вопросов сразу в целом для всех групп SU_n.

§ 4. Взаимосвязь коэффициентов Клебша — Гордана разных групп

Полученные результаты указывают на тесную взаимосвязь между коэффициентами КГ разных групп. В настоящей главе в § 1 были приведены выражения базисных коэффициентов КГ групп SU_n через коэффициенты КГ группы SU_2. Общие коэффициенты КГ строились в § 2 как соединение базисных. В § 3 было показано, как любые коэффициенты КГ и их соединения строятся из $n \times n$-символов. Коэффициенты КГ группы SU_2 (или

$n \times n$-символы) являются теми кирпичиками, из которых строятся коэффициенты КГ высших групп. В этом смысле теория коэффициентов КГ полупростых групп Ли является одним из разделов обобщенной теории угловых моментов. Вопросы взаимосвязи были до последнего времени разработаны совершенно недостаточно (отметим, что сущность симметрии Редже — это установление взаимосвязи между коэффициентами КГ групп SU_2 и SU_3). В то же время установление взаимосвязи симметрий тесно связано с поиском так называемых «скрытых» симметрий и имеет очень большое значение в физике (см. гл. VI).

Для конкретных приложений теории коэффициентов КГ к поиску и анализу физических симметрий необходимо установить методику получения и характер взаимосвязи коэффициентов КГ разных групп, выяснить общность получаемых таким образом результатов [11]. Эти вопросы удобно рассмотреть на конкретном примере. Выражение

$$\varphi_{p_{ik}}(x_i y_i) = \left[\frac{P!}{\prod\limits_{i<k} p_{ik}!}\right]^{1/2} \prod_{i<k} \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}^{p_{ik}} \tag{4.45}$$

можно трактовать как симметрический базис представления $D\ (0P0)$ группы SU_4 [2, 5, 6], придавая величинам x_i, y_i трансформационный смысл базисных векторов фундаментального представления $D\ (100)$ (см. также [21]). Отметим, что в силу (1.60) не все компоненты (4.45) линейно-независимы. Для построения канонического базиса $D\ (0P0)$ сузим группу SU_4 на ее подгруппу SU_3. Тогда относительно группы SU_3 представление $D\ (0P0)$ приводимо

$$D(0P0) = \sum_{R+S=P} D(RS), \tag{4.46}$$

а (4.45) является симметрическим базисом $D\ (RS)$ (при фиксированных значениях $R = p_{14} + p_{24} + p_{34}$, $S = p_{12} + p_{13} + p_{23}$). Поэтому для каждого $D\ (RS)$ можно построить канонический базис из (4.45) с помощью коэффициентов КГ группы SU_4 (ср. [10]). В результате получаем канонический базис $D\ (0P0)$:

$$0P0;\ [RS;\ T];\ [Yth]\rangle_{(xy)} =$$
$$= [P+1]^{-1/2} \sum_{Y_i T_i t_i} \left\langle \begin{matrix} R0 \\ Y_1 T_1 t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0S \\ Y_2 T_2 t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} RS \\ YTS \end{matrix} \right\rangle (-1)^{(T_2-t_2)+p_{23}} \varphi_{p_{ik}}(x_i, y_k), \tag{4.47}$$

где

$$R = p_{14} + p_{24} + p_{34}, \qquad S = p_{13} + p_{12} + p_{23},$$
$$Y_1 = R/3 - p_{34}, \quad T_1 = {}^1/_2(p_{14} + p_{24}), \quad t_1 = {}^1/_2(p_{14} - p_{24}),$$
$$Y_2 = -S/3 + p_{12}, \quad T_2 = {}^1/_2(p_{13} + p_{23}), \quad t_2 = {}^1/_2(p_{13} - p_{23}).$$

Числа R, S отличают $D\ (R,\ S)$ в разложении (4.46); Y, T, t нумеруют компоненты базиса внутри представления $D\ (RS)$ [10]; h — собственное значение некоторого аддитивного оператора H, необходимого для однозначного определения базиса произвольного представления $D\ (P_1P_2P_3)$ группы SU_4. Однако для рассматриваемых представлений h однозначно связано с другими нумерующими числами.

Разлагая в (4.47) $\varphi_{p_{ik}}$ по базисным векторам представлений $D\ (P00)$, получаем выражение для соответствующего (нормированного) коэффици-

ента КГ группы SU_4

$$\left\langle \begin{matrix} P00 \\ R'0T';\ Y't'h' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P00 \\ R''0T'';\ Y''t''h'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0P0 \\ RST;\ Yth \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \left[\frac{R'!\,R''\,(S+1)\,R!}{(R'-S)!\,(R''-S)!\,(P+1)!}\right]^{1/2} \left\langle \begin{matrix} T' \\ t' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T'' \\ t'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ t \end{matrix} \right\rangle (-1)^{R''+S} \sum \begin{vmatrix} T_1' & T_1'' & T_1 \\ T_2' & T_2'' & T_2 \\ T' & T'' & T \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2}(R'-S) \\ \frac{1}{2}(R'-S)-2T_1' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}(R''-S) \\ \frac{1}{2}(R''-S)-2T_1'' \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2}-2T_1 \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(R+2S)+T+\frac{Y}{2}+1\right] \\ \frac{1}{2}\left[T-\frac{Y}{2}+1-\frac{1}{3}(R+2S)+2(T_1+T_2)\right] \end{matrix} \middle| \cdots \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(2R+S)-T-\frac{Y}{2}\right] \\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(2R+S)-\frac{Y}{2}+T-2(T_1+T_2)\right] \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} \frac{1}{2}(P+1) \\ \frac{1}{6}(R-S)+T+\frac{Y}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2}(R'-S) \\ \frac{1}{2}(R'-S)-2T_1' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}S \\ \frac{1}{2}S-2T_2' \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} \frac{1}{2}R' \\ \frac{1}{2}R'-2T' \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2}(R''-S) \\ \frac{1}{2}(R''-S)-2T_1'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}S \\ \frac{1}{2}S-T_2'' \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} \frac{1}{2}R'' \\ \frac{1}{2}R''-2T'' \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} T_2 \\ T_2''-T_2' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ T_2''-T_2'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle [(2T_1+1)(2T_2+1)(2T'+1)(2T''+1)]^{1/2}. \qquad (4.48)$$

Сравнивая (4.48) с выражением коэффициента КГ группы SU_3, приведенным в работе [11] (формула (5)), видим, что при фиксированных R и S коэффициенты КГ группы SU_4 указанного вида равны (с точностью до постоянного множителя) коэффициентам КГ группы SU_3 типа $\langle R'0\,R''0 \,\|\, R'+R''-2S\;\; S\rangle$.

Однако выражение (4.45) можно рассмотреть и с другой точки зрения, если придать парам (x_i, y_i) трансформационный смысл спиноров. Тогда (4.45) образуют симметрический базис производящих инвариантов для коэффициентов Вигнера группы SU_2 четвертого ранга типа (1.59). Полный ортонормированный базис производящих инвариантов для коэффициентов Вигнера группы SU_2 четвертого ранга можно получить с помощью произведения обычных коэффициентов КГ и Вигнера. При схеме связи $((j_1j_2)\,j_{12}j_3)j_4$ ортонормированный базис образует выражения (1.53). Придавая в (1.52) величинам x_i, y_i трансформационный смысл векторов D (100) группы SU_4, получаем ортонормированный базис D ($0P0$), причем норма их равна $\left[\prod_i (2j_i)!\right]^{1/2}[P!]^{-1}$. Построенные таким образом базисные векторы, являясь собственными функциями соответствующих операторов, однозначно нумеруются числами R, S, T, Y, t, h, связанными с j_i соотношениями:

$$R = 2j_4, \qquad S = j_1+j_2+j_3-j_4, \qquad Y = {}^2/_3(j_1+j_2+j_3)-2j_3,$$
$$t = j_1-j_2, \quad T = j_{12}, \qquad P = j_1+j_2+j_3+j_4. \qquad (4.49)$$

Отсюда для коэффициента КГ группы SU_4 получаем следующее выражение:

$$\left\langle \begin{matrix} P00 \\ R'0T;\ Y't'h' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P00 \\ R''0T'';\ Y''t''h'' \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} 0P0 \\ RST;\ Yth \end{matrix} \right\rangle = (-1)^{T'+T''-T} \left\langle \begin{matrix} T' \\ t' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T'' \\ t'' \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T \\ t \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} T \\ T''-T' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} {}^1/_2(R'+R'')-T'+T'') \\ {}^1/_2(R''-R')+T'-T'') \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P-{}^1/_2(R'+R'') \\ {}^1/_2(R'-R'') \end{matrix} \right\rangle \tag{4.50}$$

Итак, имеется тесная связь между коэффициентами КГ групп SU_2, SU_3, SU_4, основой которой является выражение (4.45). В зависимости от трансформационных свойств величин x_i, y_i это выражение играет роль базиса производящих инвариантов группы SU_2 либо базиса неприводимого представления группы SU_4. Проведенное рассмотрение указывает конкретный путь построения единой теории коэффициентов КГ различных групп на основе взаимосвязи инвариантов и базисных функций неприводимых представлений. При построении базисных функций D $(0P0)$ с помощью коэффициентов КГ группы SU_2 при других схемах связи можно получить ортонормированные базисы, отличные от (4.47). Разложение одного ортонормированного базиса D $(0P0)$ по другому на языке инвариантов SU_2 соответствует разложению одной полной системы производящих инвариантов I_A по другой I_B, отвечающих различным схемам связи

$$I_A = \sum_B C_{A,B} I_B.$$

Для группы SU_2 величины $C_{A,B}$ являются j-символами. Таким образом, и в основе взаимосвязи коэффициентов КГ группы SU_n лежат производящие инварианты и соотношения между ними.

§ 5. Конечные вращения. Другие группы

Как следствие проведенного выше построения и анализа коэффициентов КГ групп SU_n нужно отметить два аспекта. Во-первых, универсальность коэффициентов КГ. Из них могут быть сконструированы любые интересующие нас величины, имеющие групповой смысл, например матрицы конечных вращений групп SU_n. Во-вторых, общность проведенного анализа. Все принципиальные моменты полностью переносятся на ортогональные, симплектические и любые другие компактные группы Ли (некоторые моменты справедливы и для некомпактных групп). Оба указанных аспекта обсуждаются в статье [153] настоящего сборника. Поэтому ограничимся несколькими замечаниями. Матрица конечных преобразований произвольной компактной группы во многом является аналогом матрицы $D^{*}_{mm'}$ группы SU_2. Это можно видеть на примере группы SU_3: по определению имеем

$$|PQ;\ YTt\rangle' = \sum_{Y'T't'} D^{PQ}_{YTtY'T't'} |PQ;\ Y'T't'\rangle. \tag{4.51}$$

Учитывая преобразование функции канонического базиса при преобразовании фундаментальных векторов:

$$x_i \to x_i' = A_{ij}(\varphi_\alpha) x_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 8), \tag{4.52}$$

$$\xi^i \to (\xi^i)' = A^{-1}_{ij} \xi^j = A^{*}_{ij} \xi^j,$$

получаем выражение для матрицы конечных преобразований

$$D^{PQ}_{YT\varkappa,\,Y'T'\varkappa'} = \sum_{p_i,\,q_i,\,p^i,\,q^i} \Phi\begin{pmatrix} PQ \\ YT\varkappa \end{pmatrix} \Phi\begin{pmatrix} PQ \\ Y'T'\varkappa' \end{pmatrix} (-1)^{q_1+q^1} \times$$

$$\times \left[\prod_i p_i!\, p^i!\, q_i!\, q^i!\right]^{1/2} \left\langle \begin{matrix} {}^1/_2(p_1+p_2) \\ {}^1/_2(p_1-p_2) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} {}^1/_2(q_1+q_2) \\ {}^1/_2(q_2-q_1) \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T \\ t \end{matrix} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} {}^1/_2(p'+p^2) \\ {}^1/_2(p'-p^2) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} {}^1/_2(q'+q^2) \\ {}^1/_2(q^2-q') \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} T' \\ t' \end{matrix} \right\rangle \sum \frac{\prod\limits_{ij} A_{ij}^{p_j^i} A_{ij}^{*q_j^i}}{\prod\limits_{ij} p_i^j!\, q_i^j!}. \tag{4.53}$$

Второе суммирование в правой части проводится по индексам p_j^i, q_j^i, удовлетворяющим условиям:

$$\sum_j p_i^j = p^i, \qquad \sum_j q_j^i = q^i, \qquad \sum_i p_j^i = p_j, \qquad \sum_i q_j^i = q_j.$$

Задавая явно параметризацию в формуле (4.52), можно получить конкретную матрицу конечных преобразований и (дифференцируя ее по параметру) соответствующие инфинитезимальные операторы. Определяемая соотношениями (4.53) связь между инфинитезимальными операторами и коэффициентами КГ для юнговского умножения специального вида может быть использована для вычисления последних. При этом разной параметризации в (4.53) соответствуют различные коэффициенты КГ. Формула (4.53), полученная для SU_3, может быть непосредственно обобщена на группы SU_n. Отметим, что особый интерес представляют параметризации, имеющие определенный групповой смысл, например, векторная параметризация группы вращений и группы Лоренца [154, 155], а также использование коэффициентов КГ соответствующих групп, например [4]:

$$D^{j}_{m'm''} = \sum_{jm} (j'j''m'm'' \mid jm)\, b^j_m. \tag{4.54}$$

Что касается второго аспекта — построения общей теории коэффициентов КГ компактных групп Ли, имеющей очень большое прикладное и методическое значение, то этот круг вопросов еще ждет своего полного решения. Инфинитезимальная методика вычисления коэффициентов КГ для пятимерных групп рассмотрена в статье [153] настоящего сборника. Эта методика легко обобщается на пятимерные и ортогональные группы. Отметим, что аналогично SU_n ряд частных коэффициентов КГ может быть выражен через соединения коэффициентов КГ группы SU_2. Что касается алгебраической методики, то для ее построения необходимо знание фундаментальных представлений и инвариантов групп. В основе конкретного получения коэффициентов КГ лежит разложение инвариантов соответствующей группы по полиномиальному симметрическому базису. Инварианты ортогональных, симплектических, особых групп Ли приведены, в частности, в монографиях [49, 51]. Для групп типа $SU_n \times SU_m$ они могут быть легко построены. Первоочередными задачами являются удобное определение полиномиальных базисов и исследование новых символов, возникающих при разложении специфических инвариантов групп по полиномиальному базису (в частности, пфаффианов). Подчеркнем, что построение коэффициентов КГ всех компактных групп — это единая задача, тесно связанная с обобщенной теорией угловых моментов.

ГЛАВА V

ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧАСТИЦЫ С ВЫСШИМИ СПИНАМИ

Последние главы (V и VI) посвящены физическим приложениям. Имеются две области, которые могут быть последовательно сформулированы как прикладные разделы теории коэффициентов КГ. Одна из них — теория инвариантных уравнений, другая — теория сложных (составных) физических систем.

В настоящей главе рассмотрен круг вопросов, связанный с теорией инвариантных уравнений. Основное внимание уделено релятивистским уравнениям, в том числе разработке нового ковариантного метода расчета эффектов, пригодного для высших порядков теории возмущений и для частиц с произвольным спином.

§ 1. Коэффициенты Клебша — Гордана и теория инвариантных уравнений

Общие вопросы исследования уравнений, инвариантных относительно какой-либо группы преобразований G, имеют важное прикладное значение. Здесь будет рассмотрена последовательная групповая трактовка инвариантных уравнений и показано, что такие уравнения являются разделом теории коэффициентов КГ группы G, которая определяется спецификой физической задачи. Так, роль группы G могут играть группы симметрии уравнения Шредингера (группы, сохраняющие лагранжиан или гамильтониан системы, называют инвариантными, ср. § VI). Примерами инвариантных уравнений могут служить уравнения, инвариантные к вращениям (описывают процессы в атомных системах, волчках) [99], уравнения, инвариантные относительно группы евклидовых движений (описывают процессы в пустоте или безграничной изотропной среде) [31], релятивистские-инвариантные уравнения [31, 99, 156—160], SU_3-инвариантные уравнения и т. д. Необходимо подчеркнуть, что на основе теории коэффициентов КГ может быть развит общий подход, дана единая трактовка инвариантных уравнений.

Рассмотрим для конкретности изложения линейное уравнение определенной формы

$$\alpha D\varphi + \varkappa\varphi = 0. \tag{5.1}$$

Здесь φ — волновая функция, преобразующая по представлению S_φ группы G в пространстве R; D — ковариантный дифференциальный оператор, преобразующийся по представлению S_D группы G.

Для инвариантности уравнения относительно группы G необходимо, чтобы все члены уравнения преобразовывались по некоторому представлению S_x группы G. Отсюда следует, что α и $\varkappa$ являются матрицами проектирования соответственно для произведений представлений:

$$S_\varphi \times S_D \to S_x, \qquad S_\varphi \times S_\varkappa \to S_x. \tag{5.2}$$

Матрицы проектирования символически могут быть записаны в виде

$$\langle S_\varphi | S_D \| S_x \rangle, \qquad \langle S_\varphi | S_\varkappa \| S_x \rangle, \tag{5.3}$$

где S_φ и S_x в общем случае являются приводимыми представлениями.

При $\varkappa = \text{const}$ $S_\varphi = S_x$. Если разбить волновую функцию φ на неприводимые компоненты, индицируемые индексами i, базис представления S_x на неприводимые компоненты, индицируемые индексом k, а компоненты D индицировать индексом l_0, то матрица проектирования α может быть

представлена в виде

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} a_n \langle 1 | l_0 \| 1 \rangle & \ldots & a_{1m} \langle 1 | l_0 \| m \rangle \\ a_{21} \langle 2 | l_0 \| 1 \rangle & \ldots & a_{2m} \langle 2 | l_0 \| m \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \langle n | l_0 \| 1 \rangle & \ldots & a_{nm} \langle n | l_0 \| m \rangle \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

Величины $\langle k \mid l_0 \parallel i \rangle$ являются коэффициентами КГ группы G, постоянные a_{ik} определяются конкретными физическими требованиями с точностью до эквивалентных преобразований (ср. [145]). Матрицы проектирования типа (5.4) обобщают коэффициенты КГ на приводимые представления. Блоки, на которые разбиваются эти матрицы, соответствуют неприводимым представлениям и имеют факторизованный вид

$$a_{ik} \langle i | l \| k \rangle. \tag{5.5}$$

В некоторых случаях (5.4) — это коэффициенты КГ для определенного расширения группы G. Инвариантные суммы произведений матриц проектирования являются обобщением на приводимые представления обычных обобщенных коэффициентов КГ, возникающих при сложении нескольких представлений. Такие суммы сохраняют блочный характер. Множителем перед коэффициентом КГ в блоке является определенная сумма произведений множителей a_{ik} на трансформационные матрицы (см. § 2 настоящей главы). Вычисление любых физических величин может быть сведено к расчету сумм произведений матриц проектирования. Исследование соединений проводится методом теории коэффициентов КГ.

Базисные векторы алгебры матриц α могут быть классифицированы по произведению представлений [31] $S_x \times S_\varphi$. Алгебра матриц α ($U(\alpha)$-алгебра) может быть определена как с помощью таблицы умножения базисных векторов, так и с помощью перестановочных соотношений между матрицами α [145]. При рассмотрении уравнений более общего вида, чем (5.1), например нелинейных, все качественные выводы остаются в силе.

§ 2. Релятивистские уравнения — раздел теории угловых моментов

В качестве конкретного приложения общей методики § 1 рассмотрим уравнения, инвариантные относительно группы Лоренца. Представления группы Лоренца детально исследованы [99, 160]. Ограничимся здесь рассмотрением конечномерных представлений с каноническим базисом $u_{p_1q_1}^{P_1Q_1}$. Разложение Клебша — Гордана имеет вид [31]

$$e_{pq}^{PQ} = \sum_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} (P_1P_2p_1p_2 \mid Pp)(Q_1Q_2q_1q_2 \mid Qq)\, u_{p_1q_1}^{P_1Q_1} v_{p_2q_2}^{P_2Q_2}. \tag{5.6}$$

Связь канонического и тензорного базисов задается соотношениями [31]:

$$e_{1/2 1/2} = -ie_1 + e_2, \qquad e_{1/2 -1/2} = i(-e_0 + e_3), \tag{5.7}$$
$$e_{-1/2 1/2} = i(e_0 + e_3), \qquad e_{-1/2 -1/2} = ie_1 + e_2.$$

При анализе любого процесса в теории поля должно учитываться требование релятивистской инвариантности, т. е. необходимо рассматривать релятивистские инвариантные уравнения. Их изучению было посвящено большое число работ. Особо следует отметить монографии [31, 99, 156, 157]. Различные аспекты теории релятивистских уравнений были исследованы в работах [144, 145, 161, 162] (в [145] также приведена библиография на 1962 г.).

Рассмотрим произвольное линейное релятивистское уравнение

$$\alpha_\sigma \partial_\sigma + \varkappa\psi = 0, \tag{5.8}$$

где волновая функция ψ преобразуется по конечномерному представлению группы Лоренца S.

Результаты, полученные при исследовании уравнений типа (5.6), могут быть также применены для уравнений со взаимодействиями, с высшими производными, нелинейных. Структура релятивистских уравнений полностью соответствует общей схеме § 1. Матрицы α и $\varkappa$ имеют блочный характер. Общий вид блока

$$z_{P_1Q_1;\, P_2Q_2}(P_1Mp_1m \mid P_2p_2)(Q_1Nq_1 \mid Q_2q_2). \tag{5.9}$$

Для α_i $M = N = {}^1/_2$, для $\varkappa$ $M = N = 0$. Коэффициент $z_{P_1Q_1;P_2Q_2}$ — число, если все неприводимые представления $\tau(P, Q)$, входящие в S, различные. Если в S встречаются одинаковые представления, то $z_{P_1Q_1;P_2Q_2}$ является матрицей. С помощью коэффициентов КГ уравнение (5.1) может быть представлено в виде

$$\sum_{\tau' p' q' mn} z_{\tau\tau'}({}^1/_2P'mp' \mid Pp)({}^1/_2Q'nq' \mid Qq)\,\partial_{mn}\psi_{\tau',\, p'q'} + \varkappa\psi_{\tau;\, pq} = 0. \tag{5.10}$$

Произведения матриц сохраняют блочный характер. Так, для произведения трех матриц имеем

$$(\alpha^{M_1N_1}_{m_1n_1}\alpha^{M_2N_2}_{m_2n_2}\alpha^{M_3N_3}_{m_3n_3})_{P_1Q_1;\, P_4Q_4} = \sum_{P_2Q_2;\, P_3Q_3} A(P_2P_3;\, Q_2Q_3)_{P_1Q_1;\, P_4Q_4} \times$$
$$\times \sum_{p_2q_2;\, p_3q_3} (P_1M_1p_1m_1 \mid P_2p_2)(P_2M_2p_2m_2 \mid P_3p_3)(P_3M_3p_3m_3 \mid P_4p_4) \times$$
$$\times (Q_1N_1q_1n_1 \mid Q_2q_2)(Q_2N_2q_2n_2 \mid Q_3q_3)(Q_3N_3q_3n_3 \mid Q_4q_4). \tag{5.11}$$

Здесь $A\,(P_2P_2;\ Q_2Q_3) = z_{P_1Q_1;\, P_2Q_2}\ z_{P_2Q_2;\, P_3Q_3}\ z_{P_3Q_3;\, P_4Q_4}$.

Используя определение трансформационных матриц (см. § 2 введения), имеем

$$(\alpha^{M_1N_1}_{m_1n_1}\alpha^{M_2N_2}_{m_2n_2}\alpha^{M_3N_3}_{m_3n_3})_{P_1Q_1;\, P_4Q_4} = \sum_{M_{12}M;\, N_{12}N} F((M_1M_2)M_{12}M_3M;\, (N_1N_2)\,N_{12}N_3N) \times$$
$$\times (M_1M_2m_1m_2 \mid M_{12}m_{12})(M_{12}M_3m_{12}m_3 \mid Mm)(N_1N_2n_1n_2 \mid N_{12}n_{12}) \times$$
$$\times (N_{12}N_3n_{12}n_3 \mid Nn). \tag{5.12}$$

Формула (5.12) осуществляет разложение произведения трех матриц по базисным векторам

$$F((M_1M_2)M_{12}M_3M;\ (N_1N_2)\,N_{12}N_3N) = \sum_{P_2Q_2;\, P_3Q_3} A(P_2Q_3;\ Q_2Q_3)_{P_1Q_1;\, P_4Q_4} \times$$
$$\times (((P_1M_1)\,P_2M_2)\,P_3M_3P_4 \mid P_1((M_1M_2)\,M_{12}M_3)\,MP_4), \qquad (((Q_1N_1)\,Q_2N_2) \times$$
$$\times Q_3N_3Q_4 \mid Q_1((N_1N_2)\,N_{12}N_3)\,NQ_4)(P_1M_1p_1m_1 \mid P_4p_4)(Q_1Nq_1n \mid Q_4q_4). \tag{5.13}$$

Каждый базисный вектор представляет собой матрицу Клебша — Гордана $(P_1Mp_1m \mid P_4p_4)\,(Q_1Nq_1n \mid Q_4q_4)$ с коэффициентом $F_k\,((M_1M_2)\,M_{12}M_3M \mid N_1N_2)\ \ N_{12}N_3N)$, зависящим от констант $z_{P_iQ_i;\, P_kQ_k}$ и от способа связи моментов. Формулы типа (5.12) позволяют разложить любое произведение матриц α по базисным ковариантам, определяемым через трансформационные матрицы. С помощью полученных формул, используя соотношение

$$\sum_{p_iq_i} (P_i0p_i0 \mid P_ip_i)(Q_i0q_i0 \mid Q_iq_i) = (2P_i + 1)(2Q_i + 1) \tag{5.14}$$

и складывая диагональные элементы, находим общую формулу шпура для произведения матриц α_{mn} (α_{mn} связано с α соотношением (5.7)).

В общем виде шпур произведения матриц α_{mn} был вычислен в работе [8]

$$\mathrm{Sp}\,(\alpha_{m_1n_1}\alpha_{m_2n_2}\ldots\alpha_{m_kn_k}) = \sum_{\substack{\tau_1\ldots\tau_k\\ M_{ij}m_{ij}N_{ij}n_{ij}}} z_{\tau_1\tau_2}z_{\tau_2\tau_3}\ldots z_{\tau_k\tau_1}(2P_1+1)(2Q_1+1)\times$$
$$\times\,|(P_1M_1\ldots M_k)^A P_kP_{k-1}\ldots P_2;\ P_1|(P_1M_1\ldots M_k)^B M_{12}M_{23}\ldots 0;\ P_1]\times$$
$$\times\,|(Q_1N_1\ldots N_k)^A Q_kQ_{k-1}\ldots Q_2;\ Q_1|(Q_1N_1\ldots N_k)^B N_{12}N_{23}\ldots 0;\ Q_1]\times$$
$$\times\,(M_1M_2m_1m_2\,|\,M_{12}m_{12})(M_{12}M_3m_{12}m_3\,|\,M_{23}m_{23})\ldots(M_{k-2k-1}M_km_{k-2k-1}m_k\,|\,00)\times$$
$$\times\,(N_1N_2n_1n_2\,|\,N_{12}n_{12})(N_{12}N_3n_{12}n_3\,|\,N_{23}n_{23})\ldots(N_{k-2k-1}N_kn_{k-2k-1}n_k\,|\,00). \quad (5.15)$$

Трансформационные матрицы определяются заданием промежуточных моментов и способом связи. Способ связи A $(\ldots((P_1+M_k)+M_{k-1})+\ldots$ $\ldots+M_1)$ фиксирован. Способ связи B здесь $((\ldots(M_1+M_2)+\ldots$ $\ldots+M_k)+P_1)$, но в принципе возможны и любые другие порядки сложения $M_1\ldots M_k$. В тензорной форме шпур, поскольку он является инвариантом, может зависеть только от инвариантных тензоров δ_{ik}.
Поэтому

$$\mathrm{Sp}\,\alpha_i\alpha_k = k_0\delta_{ik}, \quad (5.16)$$

$$\mathrm{Sp}\,\alpha_i\alpha_k\alpha_l\alpha_m = k_1\delta_{ik}\delta_{lm} + k_2\delta_{il}\delta_{km} + k_3\delta_{im}\delta_{kl} \text{ и т. д.} \quad (5.17)$$

Произведение коэффициентов КГ в канонической форме соответствует произведению кронекеровских символов в тензорной. Постоянные k_i выражаются через трансформационные матрицы и параметры уравнения $z_{P_iQ_i;\,P_kQ_k}$. Формулы (5.15) позволяют записать шпур произвольного числа матриц любого заданного уравнения, минуя промежуточные стадии. Поскольку группа Лоренца является высшей группой, то вопросы редукции здесь также существенны. Цепочка редукции $SL_2 \supset SU_2$ тесно связана с переходом к представлению Гельфанда — Яглома [163]. В этом представлении матрица α_0 имеет квазидиагональную форму. Каждому значению спина S соответствует $2S+1$ одинаковый ящик. Переход к представлению Гельфанда — Яглома (базис φ^{τ}_{Rr}, $\tau=(PQ)$ — индекс представления, указывающий происхождение функции φ) был рассмотрен в работе [8]. Преобразование от базиса ψ^{PQ}_{pq} к базису φ^{τ}_{Rr} осуществляется с помощью коэффициента КГ

$$\varphi^{\tau}_{Rr} = (PQpq\,|\,Rr)\,\psi^{PQ}_{pq}. \quad (5.18)$$

Применяя преобразование (5.18) к произвольной матрице U (α)-алгебры, имеем для каждого блока (5.9)

$$z_{P_iQ_i;\,P_kQ_k}\sum_{Kk}((P_kM)P_i(Q_kN)Q_iR_i\,|\,(P_kQ_k)R_k(MN)KR_i)\times$$
$$\times\,(MNmn\,|\,Kk)(R_kKr_kk\,|\,R_ir_i). \quad (5.19)$$

Для α_i $M=N={}^1/_2$. Используя (5.7), получаем для матрицы α_0 блок (5.19) в виде

$$z_{P_kQ_k;\,P_iQ_i}((P_k{}^1/_2)P_i(Q_k{}^1/_2)Q_iR_i\,|\,(P_kQ_k)R_i({}^1/_2{}^1/_2)0R_i)\,\delta_{r_ir_k}\delta_{R_iR_k}. \quad (5.20)$$

Таким образом, матрица α_0 приведена к квазидиагональной форме. Для каждого значения спина R субматрица повторяется $2R+1$ раз. Коэффициенты в (5.20) при $\delta_{r_ir_k}\delta_{R_iR_k}$ являются коэффициентами $d^R_{\tau_i\tau_k}$ матрицы α_0 в представлении Гельфанда — Яглома. Связь между $z_{P_kQ_k;\,P_iQ_i}$ и $d^R_{\tau_i\tau_k}$ задается трансформационной матрицей.

Из изложенного видно, что теория релятивистских уравнений фактически является одним из разделов теории угловых моментов, из чего следуют два основных направления ее приложений: во-первых, использование формализма коэффициентов КГ для расчета эффектов взаимодействия частиц с произвольным спином (см. § 3 настоящей главы), во-вторых, применение в теории релятивистских уравнений симметрии Редже (ср. § 3 гл. VI).

§ 3. Расчет эффектов для частиц с произвольным спином

Большое число работ в теории поля посвящено расчетам различных эффектов. Как известно, эти расчеты являются весьма громоздкими, особенно для спинов, больших $^1/_2$, и для высших порядков теории возмущений. В ряде случаев вычисления в общем виде становятся невыполнимыми. В данном параграфе развит метод, на основе которого практически сразу по диаграмме Фейнмана можно записать сечение любого эффекта [16]. Эта возможность основывается на канонической форме записи базисов представлений группы Лоренца, и поэтому развиваемый метод можно назвать каноническим.

В работе [164] Федоров свел расчет основных физических величин для частиц с произвольным спином к вычислению шпуров от различных комбинаций матриц α и проекционных операторов. Согласно [164], если вероятность эффекта пропорциональна квадрату матричного элемента $W = c\,|\,\bar{\psi}_2 R\psi_1\,|^2$, то она может быть представлена в виде

$$W\, c\, \mathrm{Sp}\,(\bar{R}\theta_2 R\theta_1). \tag{5.21}$$

Здесь $\bar{R} = \eta^{-1}R^{+}\eta$; η — матрица метрики; θ_1 и θ_2 — проекционные матрицы начального и конечного состояний, определенные с помощью минимальных полиномов для операторов импульса $\hat{p}$ и спина $\hat{s}$; $\theta_{lk} = \alpha_l\beta_k$, где α_l и β_k — проекционные матрицы, выделяющие массовое состояние m_l и спиновое состояние s_k.

Рассматриваем, в частности, эффекты, усредненные по поляризации частиц. Их вероятности

$$W' = \frac{1}{2s_1+1}\sum_{s_1,\,s_2} W = \frac{c}{2s_1+1}\,\mathrm{Sp}\,(\bar{R}\alpha_2 R\alpha_1). \tag{5.22}$$

Проекционная матрица α легко вычисляется. Для полей со спином $S = 0,\ ^1/_2,\ 1,\ ^3/_2$ она задается формулами:

$$\begin{aligned} S &= {}^1/_2, & \alpha &= -\frac{1}{2\varkappa}(\hat{p}-\varkappa),\\ S &= 0, 1, & \alpha &= \frac{1}{2\varkappa^2}\hat{p}(\hat{p}-\varkappa),\\ S &= {}^3/_2, & \alpha &= \frac{1}{2\varkappa^3}\hat{p}^2(\hat{p}-\varkappa). \end{aligned} \tag{5.23}$$

В общем случае для построения оператора R уравнения взаимодействующих полей должны решаться в представлении Гейзенберга с помощью функций Грина. При этом правила для получения элементов матрицы рассеяния аналогичны правилам Фейнмана в квантовой электродинамике, если матрицы Дирака γ^μ заменить на α^μ, а в качестве пропагатора в импульсном представлении взять оператор $(p^\nu\alpha_\nu + \varkappa)^{-1}$ [165]. Обратный оператор легко находится с помощью минимального полинома для оператора

$\hat{p}$ и для спинов $S = 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2$ и задается формулами:

$$S = {}^1/_2, \qquad -\frac{\hat{p} - \varkappa}{p^2 + \varkappa^2},$$

$$S = 0, 1, \qquad -\frac{\hat{p}(\hat{p} - \varkappa)}{\varkappa(p^2 + \varkappa^2)} + \frac{1}{\varkappa}, \tag{5.24}$$

$$S = {}^3/_2, \qquad \frac{\hat{p}^2(\hat{p}^2 - \varkappa)}{\varkappa^2(p^2 + \varkappa^2)} - \frac{\hat{p} - \varkappa}{\varkappa^2}.$$

Таким образом, R и α представляют собой суммы произведений операторов типа $\hat{q} = q^\nu \alpha^\nu$, где q^ν — какой-либо вектор. Оператор $\bar{R}$ может быть получен из R заменой в каждом произведении $\alpha^\mu \alpha^\nu \ldots$ порядка матриц на обратный, так как требование получения уравнения (5.8) из вариационного принципа приводит к

$$\alpha^{\nu +} \eta = \eta \alpha^\nu, \tag{5.25}$$

откуда $\eta^{-1} \alpha^{\nu +} \eta = \bar{\alpha}^\nu = \alpha^\nu$ и, например,

$$\overline{\alpha^\nu \alpha^\mu} = \eta^{-1} (\alpha^\nu \alpha^\mu)^+ \eta = \eta^{-1} \alpha^{\mu +} \eta \eta^{-1} \alpha^{\nu +} \eta = \overline{\alpha^\mu}\, \overline{\alpha^\nu} = \alpha^\mu \alpha^\nu. \tag{5.26}$$

Подставляя конкретные выражения R и α в формулу (5.22), получаем суммы произведений типа $\hat{q}_1 \ldots \hat{q}_k$

$$\mathrm{Sp}(\hat{q}_1 \ldots \hat{q}_k) = \sum_{\substack{m_1 \ldots m_k \\ n_1 \ldots n_k}} q_1^{m_1 n_1} q_2^{m_2 n_2} \ldots q_k^{m_k n_k} \,\mathrm{Sp}\,(\alpha_{m_1 n_1} \alpha_{m_2 n_2} \ldots \alpha_{m_k n_k}). \tag{5.27}$$

Введем обозначения:

$$F\left(k; \begin{matrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{matrix}\right) = \sum_{\tau_1 \ldots \tau_k} z_{\tau_1 \tau_2} z_{\tau_2 \tau_3} \ldots z_{\tau_k \tau_1} (2P_1 + 1)(2Q_1 + 1) \times$$
$$\times [(P_1 M_1 \ldots M_k)^A P_k P_{k-1} \ldots P_2;\ P_1 \,|\, (P_1 M_1 \ldots M_k)^B M_{12} M_{23} \ldots 0;\ P_1] \times$$
$$\times [(Q_1 N_1 \ldots N_k)^A Q_k Q_{k-1} \ldots Q_2;\ Q_1 \,|\, (Q_1 N_1 \ldots O_k)^B (N_{12} N_{23} \ldots 0;\ Q_1], \tag{5.28}$$

$$I\left(q_1 \ldots q_k; \begin{matrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{matrix}\right) = \sum_{\substack{m_1 \ldots m_k m_{ij} \\ n_1 \ldots n_k n_{ij}}} q_1^{m_1 n_1} q_2^{m_2 n_2} \ldots q_k^{m_k n_k} \times$$
$$\times (M_1 M_2 m_1 m_2 \,|\, M_{12} m_{12})(M_{12} M_3 m_{12} m_3 \,|\, M_{23} m_{23}) \ldots$$
$$\ldots (M_{k-2\,k-1} M_k m_{k-2\,k-1} m_k \,|\, 00)(N_1 N_2 n_1 n_2 \,|\, N_{12} n_{12})(N_{12} N_3 n_{12} n_3 \,|\, N_{23} n_{23}) \ldots$$
$$\ldots (N_{k-2\,k-1} N_k n_{k-2\,k-1} n_k \,|\, 00) \tag{5.29}$$

Величина $I\left(q_1 \ldots q_k; \begin{matrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{matrix}\right)$ является инвариантом, зависящим от промежуточных моментов и способа связи B. (При построении инварианта следует различать ковариантные и контравариантные компоненты). В этих обозначениях формула для шпура от произведения операторов $\hat{q}$ согласно (5.15) имеет вид

$$\mathrm{Sp}(\hat{q}_1 \ldots \hat{q}_k) = \sum_{M_{ij} N_{ij}} F\left(k; \begin{matrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{matrix}\right) I\left(q_1 \ldots q_k; \begin{matrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{matrix}\right). \tag{5.30}$$

Таким образом, формулы для сечений могут быть представлены в виде суммы инвариантов с коэффициентами (угловыми частями) $F(k)$. При фиксированном порядке связи B угловая часть $F(k)$ зависит только от представления T (т. е. от спина частицы) и числа k. При нечетном k она обраща-

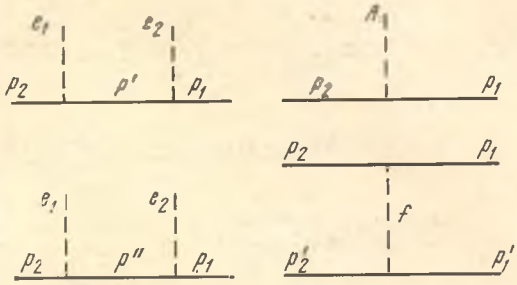


Рис. 19. Фейнмановские графики эффектов

Левый столбец — комптон-эффект; правый столбец, вверху — рассеяние электрона на внешнем поле, внизу — рассеяние частицы со спином $^3/_2$ на частице со спином 1

ется в нуль. Итак, для вычисления эффектов с конкретным спином нужно собрать члены с одинаковым числом сомножителей и выделить у них общую угловую часть $F(k)$.

Различные процессы отличаются лишь набором инвариантов, тогда как угловая часть универсальна и может быть протабулирована для любых спинов. Протабулировав функцию $F(k)$, можно, раскрывая выражение (5.22), сразу записать формулу для сечения в канонической форме. В качестве примера рассмотрим комптон-эффект на частице со спином $^1/_2$. Полагая $\varkappa = m$ и выписывая оператор согласно рис. 19, *а*, *б*

$$R = \hat{e}_2 \frac{\hat{p}' - m}{p'^2 + m^2} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \frac{\hat{p}'' - m}{p''^2 + m^2} \hat{e}_2, \tag{5.31}$$

имеем для сечения

$$W' = c\,\mathrm{Sp}\,[\bar{R}(\hat{p}_2 - m) R (\hat{p}_1 - m)] = c\left[\frac{\mathrm{Sp}\,A_1}{(p'^2 + m^2)^2} + \frac{\mathrm{Sp}\,A_2}{(p''^2 + m^2)^2} + \frac{\mathrm{Sp}\,A_3 + \mathrm{Sp}\,A_4}{(p'^2 + m^2)(p''^2 + m^2)}\right]. \tag{5.32}$$

Здесь

$$A_1 = \hat{e}_1\hat{p}'\hat{e}_2\hat{p}_2\hat{e}_2\hat{p}'\hat{e}_1\hat{p}_1 + \hat{e}_1\hat{p}'\hat{e}_2\hat{p}_2\hat{e}_2 m\hat{e}_1 m + e_1 m\hat{e}_2 m\hat{e}_2\hat{p}'\hat{e}_1\hat{p}_1 + \hat{e}_1 m\hat{e}_2 m\hat{e}_2 m\hat{e}_1 m +$$
$$+ \hat{e}_1\hat{p}'\hat{e}_2 m\hat{e}_2\hat{p}'\hat{e}_1 m + \hat{e}_1\hat{p}'\hat{e}_2 m\hat{e}_2 m\hat{e}_1\hat{p}_1 + \hat{e}_1 m\hat{e}_2\hat{p}_2\hat{e}_2\hat{p}'\hat{e}_1 m + \hat{e}_1 m\hat{e}_2\hat{p}_2\hat{e}_2 m\hat{e}_1\hat{p}_1; \tag{5.33}$$

A_2 получается из A_1 заменой $\hat{e}_2 \rightleftarrows \hat{e}_1$, $\hat{p}' \rightleftarrows \hat{p}''$; в A_3 первая половина сомножителей взята из A_1, вторая — из A_2; в A_4 — первая половина из A_2, вторая — из A_1. Используя формулу (5.30), сразу записываем ответ в канонической форме

$$W' = c\frac{1}{(p'^2 + m^2)^2}\Big\{\sum F(8)\, I(e_1 p' e_2 p_2 e_2 p' e_1 p_1) + m^2 \sum F(6)\,[I(e_1 p' e_2 p_2 e_2 e_1) +$$
$$+ I(e_1 e_2 e_2 p' e_1 p_1) + I(e_1 p' e_2 e_2 p' e_1) + I(e_1 p' e_2 e_2 e_1 p_1) + I(e_1 e_2 p_2 e_2 p' e_1) +$$
$$+ I(e_1 e_2 p_2 e_2 e_1 p_1)] + m^4 \sum F(4)\, I(e_1 e_2 e_2 e_1)\Big\} + \ldots \tag{5.34}$$

Здесь $p' = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$, $p'' = p_1 - k_1 = p_2 - k_2$.

Аналогично по графикам Фейнмана может быть записано и любое другое сечение.

Для усреднения по поляризациям фотонов нужно провести суммирование по независимым поляризациям под знаком инварианта. В качестве линейно-независимых векторов поляризации можно выбрать, как обычно,

$$e^1 = \{0i00\}, \quad e^2 = \{00i0\}, \quad e^3 = \{000i\}, \quad e^0 = \{1000\}. \tag{5.35}$$

Суммирование выполняется с помощью аппарата теории угловых моментов, при этом соответствующие инварианты сводятся к инвариантам от меньшего числа переменных. Рассмотрим в качестве примера $I_B(e_\mu p_2 e_\mu p_1)$ с последовательной схемой связи B.

Перейдем к схеме связи C: $(1 \div 3) + (2 \div 4)$. Тогда

$$I_B\left(e_\mu p_2 e_\mu p_1; \begin{matrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{matrix}\right) = \sum_{M'_{ij} N'_{ij}} [(M_1 \ldots M_4)^B M_{ij}; 0 \,|\, (M_1 \ldots M_4)^C M'_{ij}; 0] \times$$

$$\times [(N_1 \ldots N_4)^B N_{ij}; 0 \,|\, (N_1 \ldots N_4)^C N_{ij}; 0] \cdot I_C\left(e_\mu p_2 e_\mu p_1; \begin{matrix} M'_{ij} \\ N'_{ij} \end{matrix}\right); \qquad (5.36)$$

$$I_C\left(e_\mu p_2 e_\mu p_1; \begin{matrix} M'_{ij} \\ N'_{ij} \end{matrix}\right) = \sum_{\substack{m_1 \ldots m_4\, m_{13} m_{24} \\ n_1 \ldots n_4\, n_{13} n_{24}}} e_\mu^{m_1 n_1} p_2^{m_2 n_2} e_\mu^{m_3 n_3} p_1^{m_4 n_4} \times$$

$$\times (M_1 M_3 m_1 m_3 \,|\, M'_{13} m_{13})(M_2 M_4 m_2 m_4 \,|\, M'_{24} m_{24})(M'_{13} M'_{24} m_{13} m_{24} \,|\, 00) \times$$

$$\times (N_1 N_3 n_1 n_3 \,|\, N'_{13} n_{13})(N_2 N_4 n_2 n_4 \,|\, N'_{24} n_{24})(N'_{13} N_{24} n_{13} n_{24} \,|\, 00). \qquad (5.37)$$

Проводя суммирование по μ и подставляя конкретные значения векторов e^1, e^2, e^3, e^4, получаем

$$I_C\left(\ldots; \begin{matrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{matrix}\right) = I_C\left(\ldots; \begin{matrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{matrix}\right) = I_C\left(\ldots; \begin{matrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{matrix}\right) = 0,$$

$$I_C\left(\ldots; \begin{matrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{matrix}\right) = 4I(p_2 p_1). \qquad (5.38)$$

Аналогично можно упростить любой инвариант, практически усреднение по поляризации фотонов сводится к перегруппировке векторов под знаком инварианта с помощью трансформационных матриц.

Аппарат теории угловых моментов может быть использован и при переводе канонической формы записи в обычную тензорную. Для этого необходимо рассмотреть переход от

$$I\left(q_1 \ldots q_k; \begin{matrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{matrix}\right) \qquad (5.39)$$

к комбинации из тензорных сверток $g_{ik} \ldots q^i q^k \ldots$. При наличии четырех векторов a, b, c, d инварианты в каноническом представлении можно записать в виде

$$[((ab)^{M_{12} N_{12}} c)^{M_{123} N_{123}} d]^{00}. \qquad (5.40)$$

Так как $g_{ik} g_{lm} a^i b^k c^l d^m$ на каноническом языке есть $[(ab)^{00} (cd)^{00}]^{00}$, то переход к тензорному представлению есть просто изменение порядка связи, описываемое трансформационной матрицей. Перевод инвариантов в тензорную форму для произвольного k аналогичен. Следует отметить, что при $M_{ij} \neq N_{ij}$ $\begin{pmatrix} M_{ij} \\ N_{ij} \end{pmatrix}$ и $I\begin{pmatrix} N_{ij} \\ M_{ij} \end{pmatrix}$ только в сумме соответствуют комбинации тензорных сверток. Однако в формулах для сечений их угловые части согласно определению $F(k)$ равны, и эти инварианты встречаются всегда в сумме.

Для иллюстрации рассмотрим рассеяние электрона на внешнем поле (рис. 19, *в*)

$$W' = c\,\mathrm{Sp}\,[\hat{A}(\hat{p}_2 - m)\hat{A}(\hat{p}_1 - m)] = c\,\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{p}_2\hat{A}\hat{p}_1 + m^2\hat{A}\hat{A}). \qquad (5.41)$$

Отсюда сразу записываем ответ в канонической форме

$$W' = c\left[\sum F(4)\, I(Ap_2 Ap_1) + m^2 F(2)\, I(AA)\right]. \qquad (5.42)$$

Для перевода полученного сечения в тензорную форму запишем (5.42) в развернутом виде

$$W' = c\left\{F\left(4;\begin{smallmatrix}1 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{smallmatrix}\right) I\left(Ap_2Ap_1;\begin{smallmatrix}1 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{smallmatrix}\right) + F\left(4;\begin{smallmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right) I\left(Ap_2Ap_1;\begin{smallmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right) + \right.$$
$$+ F\left(4;\begin{smallmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{smallmatrix}\right) I\left(Ap_2Ap_1\begin{smallmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{smallmatrix}\right) +$$
$$\left. + F\left(4;\begin{smallmatrix}0 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right) I\left(Ap_2Ap_1;\begin{smallmatrix}0 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right) + m^2F(2)\,I(AA)\right\}. \qquad (5.43)$$

Для электрона

$$T = \tau(1/2\,0) + \tau(0\,1/2), \qquad z_{0\,1/2;\,1/2\,0} = -z_{1/2\,0;\,0\,1/2} = \sqrt{2}, \qquad F\left(4;\begin{smallmatrix}1 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{smallmatrix}\right) = 0,$$

$$F\left(4;\begin{smallmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right) = F\left(4;\begin{smallmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{smallmatrix}\right) = -3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad F\left(4;\begin{smallmatrix}0 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{smallmatrix}\right) = 4, \qquad F(2) = 4.$$

Используя формулы перехода к тензорному представлению, записываем сечение в тензорной форме

$$W' = 4c\,[(Ap_1)(p_2A) + (Ap_2)(Ap_1) - (AA)(p_2p_1) + m^2(AA)]. \qquad (5.44)$$

В случае $A = \{A_0 000\}$, $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$, $v = v_1$, $p = \{\varepsilon\mathbf{p}\}$ получаем известную формулу

$$W' = 4cA_0^2 2\varepsilon^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \qquad (5.45)$$

где θ — угол рассеяния.

Сечения многочастичных процессов выражаются (вместо (5.22)) через произведение шпуров от $(\bar{R}\alpha_2 R\alpha_1)$ для каждой частицы. Ответ в канонической форме записывается, как обычно, но инварианты, соответствующие разным частицам, связаны между собой суммированием по поляризациям виртуальных фотонов.

Рассмотрим, например, рассеяние частицы со спином $3/2$ на векторной частице (рис. 19). Импульсы частицы со спином $3/2$ обозначим через p_1p_2, импульсы частицы со спином 1 — через $p_1'p_2'$. Усредняя по поляризации частиц, для квадрата матричного элемента получаем

$$\frac{1}{(2s_1+1)(2s_1'+1)}\sum_{s_1's_2'}|M|^2 = \frac{1}{192m^6m'^4}\frac{1}{(p_2-p_1)^4}\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\,[\hat{f}^i\hat{p}_2(\hat{p}_2-m)\hat{f}^j\hat{p}_1(\hat{p}_1-m)]\,\mathrm{Sp}\,[\hat{f}^i\hat{p}_2'(\hat{p}_2'-m)\hat{f}^j\hat{p}_1'(\hat{p}_1'-m)] =$$
$$= \frac{1}{192m^6m'^4(p_2-p_1)^4}\Big[\sum F(8)\,I(f^ip_2p_2p_2f^jp_1p_1p_1) + m^2\times$$
$$\times\sum F(6)\,I(f^ip_2p_2f^jp_1p_1)\Big]\Big[\sum F'(6)\,I(f^ip_2'p_2'f^jp_1'p_1') +$$
$$+ m'^2\sum F'(4)\,I(f^ip_2'f^jp_1')\Big] \qquad (5.46)$$

Перевод в тензорную форму оказывается громоздким из-за большого количества инвариантов, различающихся значениями промежуточных моментов.

Поляризационные эффекты при взаимодействии частиц тесно связаны с их спином. Обычно спиновые свойства частицы описываются оператором

$$\hat{\sigma}_s = \frac{i}{2}s_a e_{abc}J^{bc} \qquad (a, b, c = 1, 2, 3), \qquad (5.47)$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор, на направление которого проектируется спин частицы, J^{bc} — инфинитезимальные операторы.

Однако с помощью (5.47) можно описать только состояния с продольной поляризацией, более того, оператор (5.47) не имеет ковариантной формы по

отношению к группе Лоренца. В работе [166] построен оператор спина, свободный от этих недостатков. Вместо вектора s вводятся два ортогональных единичных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$; $\mathbf{s} = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$, при этом

$$\hat{\sigma}_s = ie_\nu e'_{\mu} J^{\nu\mu}, \tag{5.48}$$

где

$$e_\nu = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 n \\ \mathbf{e}_1 + \dfrac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{e}_1)}{1+n_0} \end{Bmatrix}, \quad e'_{\mu} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_2 \mathbf{n} \\ \mathbf{e}_2 + \dfrac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{e}_2)}{1+n_0} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/\varkappa, \quad n_0 = p_0/\varkappa. \tag{5.49}$$

В каноническом базисе формула (5.48) имеет вид

$$\hat{\sigma}_s = i \sum_{\substack{m_1 n_1 k \\ m_2 n_2 l}} (M_1 M_2 m_1 m_2 \,|\, Kk)(KKk - k \,|\, 00) \times$$
$$\times (N_1 N_2 n_1 n_2 \,|\, Ll)(LLl - l \,|\, 00)\, e^{M_1 N_1}_{m_1 n_1} e^{M_2 N_2}_{m_2 n_2} J^{KL}_{kl}. \tag{5.50}$$

Инфинитезимальные операторы J^{KL}_{kl} составляют базис представления τ (1001) [145], и матрицы J^{1001}_{kl} могут быть записаны в форме:

$$\begin{aligned} J^{10}_{k0} &= b_{\tau\tau'}(P'1p'k \,|\, Pp)(Q'0q'0 \,|\, Qq), \\ J^{01}_{0l} &= b_{\tau\tau'}(P'0p'0 \,|\, Pp)(Q'1q'1 \,|\, Qq). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Коэффициенты $b_{\tau\tau'}$ вычислены в работе [145]. Отметим, что отличны от нуля только диагональные коэффициенты $b_{\tau\tau'}$.

Проекционная матрица β_k представляет собой полином от оператора $\hat{\sigma}$. Для $S = 1/2,\ 1,\ 3/2$ спиновые проекционные операторы имеют вид:

$$\begin{aligned} &S = 1/2, && \beta_{\pm 1/2} = \pm(\hat{\sigma} \pm 1/2); \\ &S = 1, && \beta_{\pm 1} = 1/2\,\hat{\sigma}(\hat{\sigma} \pm 1), \quad \beta_0 = -(\hat{\sigma}^2 - 1); \\ &S = 3/2, && \beta_{\pm 1/2} = \mp 1/2\,(\hat{\sigma}^2 - 9/4)(\sigma \pm 1/2), \quad \beta_{\pm 3/2} = \pm 1/6\,(\hat{\sigma}^2 - 1/4)(\hat{\sigma} \pm 3/2). \end{aligned} \tag{5.52}$$

Зная проекционные матрицы и операторы R, можно находить сечения поляризационных эффектов по общей схеме. Однако в рассматриваемом случае при раскрытии выражения (5.21) получаем суммы произведений, содержащие наряду с операторами q также и операторы σ. Рассмотрим пример:

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{q}_1 \sigma \hat{q}_2) = i \sum_{\substack{m_1 \ldots m_4 k \\ n_1 \ldots n_4 l}} q^{m_1 n_1} (M_3 M_4 m_3 m_4 \,|\, Kk)(KKk - k \,|\, 00) \times$$
$$\times (N_3 N_4 n_3 n_4 \,|\, Ll)(LLl - l \,|\, 00)\, e^{M_3 N_3}_{m_3 n_3} e^{M_4 N_4}_{m_4 n_4} q_2^{m_2 n_2}\, \mathrm{Sp}\,(\alpha^{M_1 N_1}_{m_1 n_1} J^{KL}_{kl}\, \alpha^{M_2 N_2}_{m_2 n_2}). \tag{5.53}$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{q}_1 \sigma \hat{q}_2) = i \sum (M_3 M_4 m_3 m_4 \,|\, Kk)(KKk - k \,|\, 00) \times$$
$$\times (N_3 N_4 n_3 n_4 \,|\, Ll)(LLl - l \,|\, 00)\, e^{M_3 N_3}_{m_3 n_3} e^{M_4 N_4}_{m_4 n_4} \Phi\left(3; \begin{matrix} M_{1k} \\ N_{1l} \end{matrix}\right) \times$$
$$\times (M_1 K m_1 k \,|\, M_{1k} m_{1k})(M_{1k} M_2 m_{1k} m_2 \,|\, 00) \times$$
$$\times (N_1 L n_1 l \,|\, N_{1l} n_{1l})(N_{1l} N_2 n_{1l} n_2 \,|\, 00)\, q_1^{m_1 n_1} q_2^{m_2 n_2}. \tag{5.54}$$

Обозначим

$$A^{KL}_{kl} = i \sum_{m_3 n_3 m_4 n_4} (M_3 M_4 m_3 m_4 \,|\, Kk)(KKk - k \,|\, 00) \times$$
$$\times (N_3 N_4 n_3 n_4 \,|\, Ll)(LLl - l \,|\, 00)\, e^{M_3 N_3}_{m_3 n_3} e^{M_4 N_4}_{m_4 n_4}. \tag{5.55}$$

Эта шестикомпонентная величина ведет себя, как тензор, преобразуемый по τ (1001), и зависит, вообще говоря, от s и p. Тогда из (5.54) получаем

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{q}_1\sigma\hat{q}_2) = \sum_{M_{1k}N_{1l}} \Phi\left(3;\begin{matrix}M_{1k}\\N_{1l}\end{matrix}\right) I\left(q_1Aq_2;\begin{matrix}M_{1k}\\N_{1l}\end{matrix}\right). \tag{5.56}$$

Здесь формально все аналогично формуле (5.30); только тому месту в шпуре, где стоит оператор σ, в инварианте соответствует тензор A_{kl}^{KL}. Точно так же вычисляется любой член из выражения (5.21). Во всяком случае для поляризационных эффектов схема расчетов сохраняется, и по графику Фейнмана может быть записано в общем виде соответствующее сечение.

Итак, сечение любого процесса (одно- или многочастичного, усредненного или нет по поляризациям частиц и фотонов) в канонической форме записывается без труда. Перевод результата в тензорную форму встречает большие трудности, поскольку инварианты от шести и более векторов содержат много промежуточных моментов, и система определяющих уравнений является громоздкой. Поэтому желательно с начала до конца работать в каноническом представлении. Хотя проведенное рассмотрение ограничено рамками теории возмущений и пригодно для слабых взаимодействий и электромагнитных переходов без изменения спина, оно может быть полезно и при построении инвариантных амплитуд взаимодействия любых частиц с высшими спинами. Феноменологическая трактовка амплитуд взаимодействия была развита в работе Маринова [167] на основе $2\,(2S+1)$-компонентной волновой функции, введенной Баргманом и Вигнером [168] (см. также [169, 170]). В общем случае описание поляризационных эффектов для частиц с высокими спинами требует использования не только среднего спина, но и поляризационных моментов высокого порядка [167, 171]. При этом необходимо применять тензорные произведения векторов e и e' (спиновые корреляции).

Рассмотрим в качестве примера произведение двух спиновых операторов $\hat{\sigma}_s\hat{\sigma}_{s'}$. Обозначим

$$B_{rs}^{RS} = A_{kl}^{KL}A_{k'l'}^{K'L'}(KK'kk'\,|\,Rr)(LL'll'\,|\,Ss). \tag{5.57}$$

Тогда в конкретных случаях получаем выражения типа (ср. формулу (5.56))

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{q}_1\hat{\sigma}_s\hat{\sigma}_{s'}\hat{q}_2) = \sum \Phi\left(3;\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right) I\left(q_1Bq_2;\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right). \tag{5.58}$$

Аналогично рассматриваются тензорные произведения более высоких порядков. Однако для систематического анализа амплитуд взаимодействия требуется как более детальное сопоставление с феноменологической трактовкой, так и дальнейшая разработка вопросов поляризационной матрицы плотности для частиц с высшими спинами. В целом развитый подход помимо резкого сокращения вычислений приводит к выяснению групповой структуры сечений, их симметрий. Простым переносом развитый аппарат можно применить для вычисления сечений в рамках других инвариантных уравнений.

§ 4. Перестановочные соотношения. Релятивистские генеалогические коэффициенты

В теории релятивистски-инвариантных (и вообще инвариантных) уравнений важную роль играют проекционные матрицы типа α или $\varkappa$, обобщающие понятие коэффициента КГ на приводимые представления. В данном параграфе рассмотрены их свойства, алгебраическая структура, построение перестановочных соотношений. Под перестановочными соотношениями по-

нимают минимальное число алгебраических соотношений, полностью определяющих алгебру матриц α: $U(\alpha)$-алгебру. Остальные соотношения между матрицами являются их следствиями. Приведем конкретные примеры перестановочных соотношений. Уравнение Дирака

$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\delta_{ik}. \tag{5.59}$$

Уравнение Даффина — Кеммера (спин 0)

$$\begin{gathered}\beta_i\beta_k\beta_l + \beta_l\beta_k\beta_i = \delta_{ik}\beta_l + \delta_{kl}\beta_i;\\ \beta_i\beta_k\beta_l = 0, \qquad i \neq k \neq l;\\ \beta_m^2\beta_l = \beta_{m'}^2\beta_l, \qquad m \neq m'; \qquad B^2 = 5B - 4E.\end{gathered} \tag{5.60}$$

Здесь $B = \sum\limits_\alpha \beta_\alpha^2$, E — единичная матрица.

Уравнение Даффина — Кеммера (спин 1)

$$\beta_i\beta_k\beta_l + \beta_l\beta_k\beta_i = \delta_{kl}\beta_i + \delta_{ik}\beta_l, \qquad B^2 = 5B - 4E. \tag{5.61}$$

Для других уравнений перестановочные соотношения имеют намного более сложный характер. Ранее большое внимание обращалось на перестановочные соотношения в связи с тем, что с помощью (5.59) — (5.61) вычислялись шпуры. Однако, как было показано в § 2 и 3 настоящей главы, перестановочные соотношения не являются сколько-нибудь необходимыми для практических расчетов различных эффектов. Их значение в другом — в исследовании с их помощью структуры и симметрии соединений матриц α. Вопросам построения и исследования свойств перестановочных соотношений посвящены работы [8, 19, 144, 145]. Рассмотрим алгебру α-матриц, составленную из величин

$$c^\sigma\alpha_\sigma + c^{\rho\sigma}\alpha_\rho\alpha_\sigma + c^{\varkappa\rho\sigma}\alpha_\varkappa\alpha_\rho\alpha_\sigma + \ldots, \tag{5.62}$$

где $c^{\ldots}$ — комплексные коэффициенты.

Пусть $u_p(\alpha)$ — линейно-независимый базис $U(\alpha)$-алгебры; он преобразуется по некоторому представлению группы Лоренца

$$u_p(l\alpha) = \sum_q L_p^q u_q(\alpha), \tag{5.63}$$

где $x_i = l_{ik}x_k$ — преобразование Лоренца.

Представления L и S связаны равенством

$$\sum_q L_p^q(l)\, u_q(\alpha) = S(l)\, u_p(\alpha)\, S(l^{-1}). \tag{5.64}$$

Операторы $L(l)$ осуществляют представление группы Лоренца, эквивалентное прямому произведению представления S на сопряженное ему представление $\tilde{S}$ [31, 144]:

$$L = S \times \tilde{S}. \tag{5.65}$$

Каждому неприводимому представлению, входящему в $S \times \tilde{S}$, соответствует ковариант, составленный из матриц α. Эти коварианты исчерпывают базис $U(\alpha)$-алгебры. Для уравнения Дирака

$$S = D(0\,{}^1/_2) + D({}^1/_2\,0), \quad L = D(10) + D(01) + 2D({}^1/_2\,{}^1/_2) + 2D(00). \tag{5.65'}$$

Для уравнения Даффина — Кеммера

$$S = D({}^1/_2\,{}^1/_2) + D(00), \quad L = D(11) + D(10) + D(01) + 2D({}^1/_2\,{}^1/_2) + 2D(00) \tag{5.65''}$$

и т. д. (см. также [144]).

Для построения $U(\alpha)$-алгебры необходимо явно записать коварианты из произведений матриц α. Матрица α_i по индексу i преобразуется по представлению $D(^1/_2\ ^1/_2)$. Произведение двух матриц $\alpha_i\alpha_n$ преобразуется по представлению $D(^1/_2\ ^1/_2) \times D(^1/_2\ ^1/_2)$. Это выражение может быть разложено на неприводимые представления

$$D(^1/_2\ ^1/_2) \times D(^1/_2\ ^1/_2) = D(11) + D(10) + D(01) + D(00). \qquad (5.66)$$

Аналогичные выражения могут быть записаны для произведений произвольного числа матриц α. Коварианты, соответствующие неприводимым представлениям, содержащимся в выражениях типа (5.66), строятся очевидным образом с помощью коэффициентов КГ. Из сравнения выражений (5.65′) — (5.65″) с выражением (5.66) можно сразу приравнять нулю коварианты, не содержащиеся в $S \times \bar{S}$. Для остальных ковариантов, зная коэффициенты a_{ik} перед блоками, можно с помощью методики, изложенной в [8], найти базис $u_p(\alpha)$ и соответствующие перестановочные соотношения, определяющие его. До сих пор рассмотрение касалось только требования релятивистской инвариантности. Однако не менее принципиальную роль в теории релятивистских уравнений играет группа перестановок [3, 19].

Требование релятивистской инвариантности приводит к тому, что все члены, входящие в перестановочные соотношения, преобразуются по одному представлению группы Лоренца. В силу того, что в $U(\alpha)$-алгебре содержится набор одинаковых векторов α_i, все члены, входящие в перестановочные соотношения, преобразуются по одному представлению $[f]$ группы перестановок.

Таким образом, для анализа алгебры матриц α необходимо одновременное использование лоренц-инвариантности и перестановочной симметрии, т. е. необходимо построение генеалогических коэффициентов для группы Лоренца L_4. Канонический базис $u_{pq}^{^1/_2\,^1/_2}$ в пространстве R представления $D(^1/_2\ ^1/_2)$ для конечномерных представлений может быть записан в форме

$$u_{pq}^{^1/_2\,^1/_2} = u_{pq} = x_p\xi_q, \qquad (5.67)$$

где $x_p = u_{p0}^{^1/_2\,0}$ преобразуется по $D(^1/_2\ 0)$, $\xi_q = u_{0q}^{0\,^1/_2}$ — по $D(0\ ^1/_2)$.

В соответствии с § 3 гл. III задача состоит в разложении R^f на подпространства, не приводимые относительно $\pi_f \times L_4$, и построении канонического базиса в R^f:

$$\{|[f]; P, Q; p, q; a; (Y)>\}. \qquad (5.68)$$

Здесь $[f]$ — символ схемы Юнга, фиксирующей сигнатуру неприводимого представления группы $\pi_f \times SL_4$, к которому принадлежит базисный вектор; индексы PQ нумеруют неприводимые представления группы L_4, на которые распадается неприводимое представление $D(f_1 - f_2\ f_2 - f_3\ f_3 - f_4;\ 000)$ группы SL_4, отвечающее схеме Юнга $[f]$, а индексы pq — базисные векторы неприводимого представления $D(PQ)$; индекс (Y) индицирует базисные векторы $[f]$ группы π_f и одновременно кратные неприводимые представления $D(f_1 - f_2 \ldots ;\ 000)$ группы SL_4, а индекс a различает кратные неприводимые представления $D(PQ)$, «входящие» в $D(f_1 - f_2 \ldots ;\ 000)$.

В соответствии с (5.67) имеем $R = R_1 \times R_2$, где R_1 — объект $D(^1/_2\ 0)$ и R_2 — $D(0\ ^1/_2)$. Отсюда получаем изоморфизм $R^f = R_1^f \times R_2^f$. Аналогично § 5 гл. III связь канонических базисов R^f, $R_1^f\{|[f]'; Pp; (Y')>\}$ и $R_2^f\{|[f]''; Q, q; (Y'')>$ задается с помощью коэффициентов

КГ группы π_f

$$|[f]; P, Q; p, q; [f]', [f]''; a; (Y)\rangle = \sum_{(Y')(Y'')} \left\langle \begin{matrix} [f]' \\ (Y') \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [f]'' \\ (Y'') \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} [f] \\ (Y) \end{matrix} \right\} a \Big\rangle \times$$
$$\times |[f]'; P, p; (Y')\rangle |[f]''; Q, q; (Y'')\rangle, \tag{5.69}$$

Подставляя в (5.69) вместо канонических базисов R_1^f и R_2^f их выражения с помощью S-коэффициентов в тензорных базисах $|x_{p_1} \ldots x_{p_f}\rangle$ и $|\xi_{q_1} \ldots \xi_{q_f}\rangle$ соответственно, находим

$$|[f]; P, Q, p, q; a; (Y)\rangle = \sum_{(Y')(Y'')} \left\langle \begin{matrix} [f]' \\ (Y') \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [f]'' \\ (Y'') \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} [f] \\ (Y) \end{matrix} \right\} a \Big\rangle \times$$
$$\times S \begin{pmatrix} [f]'; P p; (Y') \\ p_1 \ldots p_f \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} [f]''; Q, q; (Y'') \\ q_1 \ldots q_f \end{pmatrix} |u_{p_1 q_1} \ldots u_{p_f q_f}\rangle. \tag{5.70}$$

Здесь

$$|u_{p_1 q_1} u_{p_2 q_2} \ldots u_{p_f q_f}\rangle = u_{p_1 q_1}(1) u_{p_2 q_2}(2) \ldots u_{p_f q_f}(f) =$$
$$= |x_{p_1} x_{p_2} \ldots x_{p_f}\rangle |\xi_{q_1} \xi_{q_2} \ldots \xi_{q_f}\rangle. \tag{5.71}$$

Формула (5.70) выражает канонический базис R^f в функции от $u_{p_i q_i}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, f)$. Роль генеалогических коэффициентов, как легко видеть, играют коэффициенты КГ π_f в (5.70). Конкретный пример построения канонического базиса в подпространстве $R^{[21]} \subset R^3$, отвечающем схеме Юнга $\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\end{smallmatrix}$, которая соответствует двумерному неприводимому представлению [21] группы π_f и двадцатимерному неприводимому представлению $D(110{,}000)$ группы SL_4, рассмотрен в работе [19] (см. также [21]). С помощью (5.70), используя (3.37), можно построить из матриц α величины, обладающие определенными трансформационными свойствами относительно группы π_f, определив тем самым $U(\alpha)$-алгебру. Отметим, что, задавая перестановочную характеристику волновой функции ψ (т. е. способ ее построения из $\psi^{1/2\,0}$ и $\psi^{0\,1/2}$), с помощью коэффициентов редукции S можно записать соответствующую $U(\alpha)$-алгебру. Во всяком случае вопросы перестановочной симметрии для исследования частиц с произвольным спином и их взаимодействий и анализа сложных релятивистских систем, а также взаимосвязи физических симметрий с $U(\alpha)$-алгеброй представляются весьма интересными.

В заключение укажем на связь теории релятивистских уравнений с построением коэффициентов КГ высших групп и вопросами редукции. Для стандартной редукции $SU_3 \supset SU_2$ матрица Клебша — Гордана группы SU_3

$$\left\langle \begin{matrix} P'O' \\ Y'T't' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} R''Q'' \\ Y''T''t'' \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} PQ \\ YTt \end{matrix} \right\rangle \tag{5.72}$$

имеет блочный характер, аналогичный матрице α:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(T_1' T_1'' t_1' t_1'' | Tt) \ldots a_{n1}(T_n' T_1'' t_n' t_1'' | Tt) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1m}(T_1' T_m'' t_1' t_m'' | Tt) \ldots a_{nm}(T_n' T_m'' t_n' t_m'' | Tt) \end{vmatrix} \tag{5.73}$$

В целом применение теории коэффициентов КГ представляется перспективным не только для релятивистских, но и для любых других инвариантных уравнений.

ГЛАВА VI

АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Данная глава посвящена прикладным вопросам, связанным с анализом сложных составных физических систем. Такими системами являются атомы, ядра, молекулы, адроны. Они характеризуются целым набором симметрий. Рассмотрена общая методика анализа сложных систем, вытекающая из взаимосвязи симметрий, и получен ряд конкретных результатов.

§ 1. Общие вопросы исследования сложных систем

Наряду с изучением инвариантных уравнений другим перспективным направлением, допускающим общий подход, является групповая теория сложных составных физических систем. Для таких систем до последнего времени характерным было отдельное, изолированное рассмотрение каждой симметрии. Однако в реальной физической системе имеется целый набор взаимосвязанных симметрий, существует их иерархия. Это характерно и для атомов, и для ядер, и для молекул, и для элементарных частиц. Примерами такой иерархии симметрий, отображающей структуру системы, могут служить: для атомов [29]

$$SU_{2j+1} \to 0_{2j-1} \to \ldots \to O_7 \to G_2 \to O_3,$$

для атома водорода [85]

$$O(4,2) \to O(4,1) \to O_4 \to O_3,$$

для ядер [32]

$$SU_{2j+1} \to \mathrm{Sp}(2j+1) \to \ldots \to O_3,$$

для адронов [172]

$$SU_6 \to SU_3 \to SU_2,$$

для лептонов [173]

$$O_6 \to O_5 \to O_4.$$

Иерархия симметрий определяет, в частности, редукцию представлений высших групп на представления низших, т. е. конкретную реализацию базиса (волновой функции системы). Теоретико-групповое рассмотрение различных сложных систем имеет много общего — в иерархии, в использовании одних и тех же групп, в приближенности высших симметрий. Адекватным математическим аппаратом является теория коэффициентов КГ, дающая возможность единого подхода к сложным системам как составным, состоящим из нескольких классов тождественных частиц.

При исследовании сложных физических объектов как составных структура их задается выбором базиса пространства состояний системы. В общем случае такой выбор неоднозначен и зависит от конкретного вида канонического базиса инфинитезимальных операторов группы SU_n, появляющихся при расширении исходной группы симметрии одночастичной задачи. Структура инфинитезимального пространства может быть определена в соответствии с физической симметрией объекта определенным сужением группы SU_n на цепочку подгрупп, т. е. разложением инфинитезимального представления на неприводимые представления подгруппы.

Характерным примером является SU_3-симметрия в атоме и в теории элементарных частиц. В последней фундаментальное представление $D(10)$ при сужении $SU_3 \to SU_2$ разлагается по схеме

$$D(10) \to D_{1/2} + D_0, \tag{6.1}$$

что соответствует разложению инфинитезимального представления

$$D(10) \to D_1 + 2D_{1/2} + D_0. \tag{6.2}$$

В теории атома имеем схему редукции $SU_3 \to O_3$ и соответственно [27]:

$$D(10) \to D_1, \tag{6.3}$$

$$D(11) \to D_2 + D_1. \tag{6.4}$$

Это различие предопределяет разницу в построении канонического базиса и во взаимосвязи симметрий. Реализация (6.1)—(6.2) была рассмотрена в гл. IV. Коэффициенты КГ группы SU_3 строились в виде произведения изофактора на коэффициент КГ группы SU_2. В случае реализации (6.3)—(6.4) симметрии физической системы связаны с набором некоторого числа тождественных частиц, обладающих полным моментом J. Фундаментальные представления той или иной группы симметрии соответствуют представлениям D_j группы SU_2. Например, для группы SU_4 $D(100) \to D_{3/2}$, для группы SU_5 $D(1000) \to D_2$ и т. д. Коэффициенты КГ этих групп могут быть представлены как произведение генеалогических коэффициентов [1] на коэффициенты КГ группы SU_2. Следует отметить, что проблема нахождения генеалогических коэффициентов стоит давно [27, 29, 174, 175], одночастичные генеалогические коэффициенты вычислены для ряда групп. В общем виде задача о генеалогических коэффициентах есть задача о нахождении коэффициентов КГ полупростых групп Ли. Чтобы подчеркнуть, что генеалогические коэффициенты являются частным случаем факторов в теории коэффициентов КГ (см. § 1 гл. III), используем вместо обозначений (p^2 [2] 0; p | } p^3 [3] 1) более общие обозначения типа $[{}^{PQ}_{j}|{}^{(10)}_{1}|{}^{P'_j \cdot Q'}_{1}]$. Так, нетривиальные генеалогические коэффициенты p-оболочки в этих обозначениях запишутся в виде

$$\left[\begin{matrix}(20)\\2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(10)\\1\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(30)\\1\end{matrix}\right],\quad \left[\begin{matrix}(20)\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(10)\\1\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(30)\\1\end{matrix}\right],\quad \left[\begin{matrix}(20)\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(10)\\1\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(11)\\1\end{matrix}\right],\quad \left[\begin{matrix}(20)\\2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(10)\\1\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(11)\\1\end{matrix}\right]. \tag{6.5}$$

Генеалогические коэффициенты d-оболочки могут быть записаны так:

$$\left[\begin{matrix}(P'_1P'_2P'_3P'_4)\\ \alpha', j'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1000)\\ \alpha'', 2\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(P_1P_2P_3P_4)\\ \alpha, j\end{matrix}\right]. \tag{6.6}$$

Здесь индексы α связаны с неоднозначностью разложения неприводимого представления SU_5 на неприводимые представления SU_2.

В теории атома для однозначного определения генеалогических коэффициентов выделяется цепочка подгрупп группы SU_n, а также указывается тип связи одночастичных состояний (генеалогия оболочки) [30, 174], например:

$$\begin{array}{ll} SU_3 \to O_3 & D_1, \\ SU_5 \to O_5 \to O_3 & D_2, \\ SU_7 \to O_7 \to G_2 \to O_3 & D_3. \end{array} \tag{6.7}$$

При наличии таких цепочек может быть проведена факторизация генеалогических коэффициентов (ср. § 1 гл. III). Так, для последней цепочки имеем (индексы представлений снабжены индексом группы):

$$\left[\begin{matrix}(P_1P_2P_3P_4P_5P_6)_{SU_7}\\ \alpha' j'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(100\,000)_{SU_7}\\ \alpha'', 3\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(P_1P_2P_3P_4P_5P_6)_{SU_7}\\ \alpha, j\end{matrix}\right] =$$

[1] Определение генеалогических коэффициентов здесь соответствует [146].

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} (P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'P_6')_{SU_7} & (100\,000)_{SU_7} & (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)_{SU_7} \\ (Q_1'Q_2'Q_3')_{O_7} & (100)_{O_7} & (Q_1Q_2Q_3)_{O_7} \end{array}\right] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c|c} (Q_1'Q_2'Q_3')_{O_7} & (100)_{O_7} & (Q_1Q_2Q_3)_{O_7} \\ (R_1'R_2')_{G_2} & (10)_{G_2} & (R_1R_2)_{G_2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} (R_1'R_2')_{G_2} & (10)_{G_2} & (R_1R_2)_{G_2} \\ j' & 3 & j \end{array}\right]. \tag{6.8}$$

Генеалогические коэффициенты так же, как и изофакторы, являются частными случаями A/B-факторов (§ 1 гл. III). Связь между изофакторами и генеалогическими коэффициентами определяется переходом между коэффициентами КГ с различными цепочками редукции, который задается трансформационными матрицами (ср. § 1 гл. IV).

Реальная иерархия симметрий физической системы определяет математическое описание, связанное с конкретной схемой редукции при построении коэффициентов КГ. При практическом построении волновой функции системы наиболее удобным и последовательным является метод коэффициентов редукции (§ 3 гл. III). При этом канонический базис (волновая функция) для сложной системы строится с помощью разложения тензорного произведения одночастичных состояний. Наряду с набором и иерархией симметрий характерной чертой сложных систем является появление неинвариантных групп (или групп неинвариантности [85]). Отметим здесь существенное отличие от гл. V, где исследовались инвариантные группы. Согласно концепции неинвариантных групп, введенной Эддингтоном [176], в теории используются группы, не являющиеся группами симметрии полного лагранжиана или гамильтониана. Наряду с элементарными частицами концепция неинвариантных групп становится существенной и для других физических систем, в частности молекул.

В молекулярной спектроскопии имеются указания на существование некоторых инвариантов и на периодическую зависимость геометрической симметрии от полного числа валентных электронов. В работе [90] отмечалась важность групп O_5 и O (4,1) для классификации состояний движения электрона в поле многих кулоновских центров. Отмеченные группы также не являются группами симметрии лагранжиана или гамильтониана. В этом подходе неявно содержится идея взаимосвязи симметрий, поскольку неинвариантные группы обычно являются расширениями групп симметрии лагранжиана или гамильтониана.

Для нахождения взаимосвязи симметрий удобно применить аппарат теории коэффициентов КГ, который (в отличие от характеров) позволяет наиболее полно использовать информацию, содержащуюся в факте симметрии физической системы относительно той или иной группы. На основе этого аппарата в работе [9] была сделана попытка связать симметрии SU_3 и SU_6 элементарных частиц со свойствами коэффициентов КГ. Симметрия физической системы определяется ее структурой, характером взаимодействия составляющих ее подсистем и фундаментальной симметрией, которой подчиняются подсистемы. Установление взаимосвязи указанных симметрий дает возможность либо определить характер взаимодействия, либо находить неизвестные симметрии. Игнорирование взаимосвязи физических симметрий приводит к более или менее случайному перебору возможных вариантов. Так, для классификации элементарных частиц предложено большое число различных групп; строятся многочисленные варианты свободных релятивистских уравнений (см., например, [177]), выбор которых неограничен; путем подбора используются и некомпактные группы [85—89, 178] для получения спектра масс. Поэтому постановка задачи о нахождении взаимосвязи симметрий представляется весьма актуальной. Учет взаимосвязи позволит вести целенаправленный поиск симметрий элемен-

тарных частиц, находить «скрытые» симметрии в теории ядра и молекулярной спектроскопии.

Единая теория коэффициентов КГ представляется естественным аппаратом и для этой цели. Происхождение скрытых симметрий, появление неинвариантных групп взаимосвязано со свойствами коэффициентов КГ. Симметрии коэффициентов КГ выше, чем у слагаемых представлений. Примером служит симметрия Редже коэффициентов Вигнера группы SU_2. Поэтому взаимодействующая система обладает дополнительной симметрией по сравнению с частицами, взятыми отдельно. Примером этого является симметрия Фока для атома водорода. В целом сложные (составные) системы — определенный класс физических объектов с общими симметрийными закономерностями. Набор таких систем постоянно расширяется; сложными системами в настоящее время являются объекты, еще недавно считавшиеся элементарными (например, адроны). В данной главе в рамках единого подхода рассмотрены конкретные сложные системы: атомы и ядра, адроны, молекулы, излучение.

§ 2. Атом и ядро

Из конкретных сложных физических систем наиболее изучены атомы и ядро [30, 32, 146, 179—181], исследование которых имеет много общего. В основе оболочечных моделей лежат приближение центрального поля и связанное с ним понятие конфигурации. При этом электрон (нуклон) движется в эффективном центральном поле, создаваемом остальными частицами. Использование классической теории угловых моментов при учете принципа Паули для эквивалентных электронов (теория генеалогических коэффициентов) позволило получить в одноконфигурационном приближении целый ряд результатов (расчеты сечений, уровней энергии, вероятностей переходов), имеющих важное прикладное значение (см. [30]). Высшие симметрии до последнего времени играли вспомогательную роль в теории генеалогических коэффициентов и использовались для классификации термов. Особо следует здесь отметить квантовое число синьорити (старшинство), введенное Рака [29]. Расчетное прикладное значение высшие симметрии начали приобретать для смешанных конфигураций в связи с концепцией квазиспина. Как в атоме, так и особенно в ядре реальные силы, действующие на частицу, нецентральные. Возникают смешанные конфигурации. Эллиотт [182] на примере $(d+s)^N$-конфигурации для гармонического потенциала ядра показал, что состояния смешанных конфигураций можно классифицировать по представлениям определенных непрерывных групп (см. также [183]).

В работах [184—189] была разработана концепция квазиспина, определяющего состояния конфигураций j^N, эквивалентные по числу сеньорити. Преобразование, сохраняющее квазиспины, задает переход между различными заполнениями оболочки j^N (число частиц N играет роль проекции квазиспина). Моррисон [189] показал, что квазиспины удобны для вычисления матричных элементов смешанной конфигурации $(l_A+l_B)^N$. Последние выражаются через матричные элементы операторов для каждой из оболочек A и B. Зависимость от N входит в коэффициент КГ, возникающий при сложении квазиспинов. Отметим, что этот коэффициент является одним из A/B-факторов (см. § 1 гл. III). В целом формализм квазиспина является одним из разделов теории коэффициентов КГ высших групп.

Другой подход к реальным атомам и ядрам намечен в работах [190—193] и связан с задачей трех тел. Здесь с самого начала предполагается отказ от центрального поля. Для ядер этот подход представляется особенно перспективным. Трудности лежат в вычислении коэффициентов КГ высших ортогональных групп.

Дальнейшее развитие теории сложных многочастичных систем тесно связано с коэффициентами КГ высших групп. Если приложение конкретных результатов вычисления коэффициентов КГ как к обобщению концепции квазиспина, так и к задаче трех тел представляется очевидным, то на использовании коэффициентов редукции следует остановиться особо. S-коэффициенты позволяют строить базис (волновую функцию) единым образом с максимальным использованием физических симметрий. В качестве примера рассмотрим атом, имеющий f электронов в состояниях, отвечающих конфигурации

$$(n_1 l_1)^{f^1} (n_2 l_2)^{f^2} \ldots (n_s l_s)^{f^s}, \; f^1 + f^2 + \ldots + f^s = f. \tag{6.9}$$

Нахождение волновой функции атома в приближении центрального поля сводится в конечном счете к редукции

$$R^{f^\alpha} = \sum_{[f^\alpha]} R^{[f^\alpha]} \to R^{[1^{f^\alpha}]} \to R^{[1^{f^\alpha}]}_{J^\alpha(\sigma^\alpha)} \tag{6.10}$$

и построению канонического базиса в подпространстве $R^{[1^{f^\alpha}]}_{J^\alpha,(\sigma^\alpha)}$, отвечающем неприводимому представлению $[1^{f^\alpha}]$ группы π_f (антисимметрия полной волновой функции) и неприводимому представлению D_{J^α} группы SU_2. Здесь J^α — угловой момент α оболочки; индекс (σ^α), различает кратные $R^{[1^{f^\alpha}]}_{J^\alpha,(\sigma^\alpha)}$ (с одинаковыми J^α), входящие в $R^{[1^{f^\alpha}]} R - 2(2l+1)$-мерное пространство полных одночастичных (электронных) функций.

Полная одночастичная волновая функция в виде произведения орбитальной и спиновой функций соответствует факторизации $R = R_1 \times R_2$, где R_1 — объект $D_{l_\alpha}(SU_2)$, а R_2 — объект $D_{1/2}(SU_2)$. Реализация канонического базиса в $R^{[1^{f^\alpha}]}_{J^\alpha,(\sigma^\alpha)}$ осуществляется с помощью S-коэффициентов, конкретный вид которых зависит от способа редукции в (6.10), определяемого цепочкой подгрупп $\pi_{f^\alpha} \times SU_{(4l_\alpha+2)} \supset \ldots \supset SU_2 \times SU_2 \supset \supset SU_2$. Физически способ редукции зависит от последовательности учета различных поправок к приближению центрального поля и степени связи отдельных электронов [30].

Случаю LS-связи обычно соответствует цепочка подгрупп

$$\pi_{f^\alpha} \times SU_{4l_\alpha+2} \supset SU_{4l_\alpha+2} \supset [SU_2 \times SU_{2l_\alpha+1} \supset SU_2 \times O_{2l_\alpha+1} \supset \ldots$$
$$\ldots \supset SU_2 \times SU_2 \supset SU_2. \tag{6.11}$$

Первый шаг в (6.11) тривиален, так как неприводимому представлению $[1^{f^\alpha}]$ группы $\pi_f \times SU_{4l_\alpha+2}$ соответствует неприводимое представление $D(\underbrace{0 \ldots 01}_{f}\, 0 \ldots 0)$ $SU_{4l_\alpha+2}$. Поэтому дальнейшую редукцию можно производить согласно факторизации $R^f = R^f_1 \times R^f_2$. Записывая соответствующее выражение канонического базиса R^f и подставляя в него выражения канонических базисов R^f_1 и R^f_2 в функции от S-коэффициентов и тензорных базисов R^f_1 и R^f_2, получаем канонический базис R^f в форме

$$|[f^\alpha]; s^\alpha; L^\alpha; M^\alpha_s; M^\alpha_L; (\sigma^\alpha)\rangle =$$
$$= (\dim [f^\alpha])^{-1/2} \sum_{(Y)\mu_i m_i} s_p \left\langle \begin{matrix} 1/2 \\ \mu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ \mu_2 \end{matrix} \middle| \ldots \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ \mu_f \end{matrix} \middle\| \left.\begin{matrix} s^\alpha \\ M^\alpha_s \end{matrix}\right\} (Y) \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} l^\alpha \\ m_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l^\alpha \\ m_2 \end{matrix} \middle| \ldots \middle| \begin{matrix} l^\alpha \\ m_f \end{matrix} \middle\| \left.\begin{matrix} L^\alpha \\ M^\alpha_L \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (\bar{Y}) \\ (\sigma^\alpha) \end{matrix} \right\rangle |m_1\mu_1 \ldots m_f\mu_f\rangle, \tag{6.12}$$

где

$$|m_1\mu_1 \ldots m_f\mu_f\rangle = |m_1\mu_1\rangle_{(1)} \ldots |m_f\mu_f\rangle_{(f)} = |m_1\rangle\,|\mu_1\rangle_{(f)} \ldots |m_f\rangle\,|\mu_f\rangle_{(f)}, \qquad (6.13)$$

$(\dim [f^\alpha])^{-1/2}$ соответствует величине коэффициента КГ π_f с точностью до множителя $\varepsilon_p = \pm 1$, $|m_i\mu_i\rangle_{(i)}$ — одночастичная электронная волновая функция.

Выделяя явно в S-коэффициенте «изоскалярный фактор» (частичный генеалогический коэффициент), получаем в результате, что полный генеалогический коэффициент отличается от него только фактором $\varepsilon_p\ (\dim[f^\alpha])^{-1/2}$. В случае jj-связи сначала производится расщепление $R_1 + R_2 = R' + R''$, где R' — объект $D_{l+1/2}(SU_2)$, R'' — объект $D_{l-1/2}(SU_2)$. Тогда можно записать

$$R^f = (R' + R'')^f = (R')^f + (R')^{f-1}R'' + \ldots + (R'')^f \qquad (6.14)$$

и строить в каждом «слагаемом» подпространстве канонический базис с помощью развитых выше методов. Обычно [30] вместо (6.14) рассматривается только $(R')^f$ или $(R'')^f$, что соответствует пренебрежению взаимодействием между оболочками с $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$.

Для других способов связи рассмотрение аналогично. Смысл развиваемого подхода состоит в максимальном использовании всех симметрий атома для построения волновой функции. При этом автоматически учитываются взаимодействие между оболочками (многоконфигурационный подход), а также и перестановочная симметрия. Отметим, что для решения вопросов, связанных с сочетанием перестановочной симметрии с фундаментальной, большое внимание в настоящее время уделяется правилам ветвления и соответствующей алгебре [130—136, 194]. В приложении даны формулы ветвления, существенные для практического использования. Однако последние в отличие от метода коэффициентов редукции дают возможность решения задач, связанных с разложениями на неприводимые представления, но не построением базисов. Рассмотрение для ядра будет отличаться от атома лишь в конкретных схемах редукции и учете изоспина.

Наряду с атомами и ядром представляет интерес анализ последовательно релятивистских сложных систем аналогичного типа. Такие системы могут рассматриваться как модели адронов — «адроатомы» (с этой точки зрения ядра — «адромолекулы»). Они тесно связаны с релятивистскими генеалогическими коэффициентами (см. гл. V), и рассмотрение их имеет целый ряд особенностей. В следующем параграфе будет показано, что такие модели имеют определенные групповые основания. Последовательное изучение и сопоставление свойств указанных моделей реально наблюдаемым симметриям может оказаться существенным для выяснения структуры адронов.

В заключение следует остановиться еще на одном аспекте. В § 1 настоящей главы указывалось, что наличие взаимодействующих частиц приводит к новой симметрии, следующей из симметрии коэффициентов КГ (симметрия O_4 при взаимодействии протона и электрона, симметрия O_6 для задачи трех тел и т. д.). В гл. III было показано, что коэффициенты КГ высших групп в симметрическом базисе обладают весьма высокой симметрией (симметрия $n \times n$-символов). Однако в многоэлектронных атомах даже известные симметрии (Редже, O_4) используются недостаточно. Можно отметить работы Альпера и Синаноглу [195], в которых группа O_4 используется для расчетов атомов, содержащих более одного электрона. Вместе с тем наличие высоких симметрий может оказаться весьма полезным при расчетах матричных элементов, нахождении соотношений между сечениями и т. п. Разумеется, реализация указанных возможностей требует специального исследования.

§ 3. Элементарные частицы

Исследование элементарных частиц имеет существенные отличия от атома или ядра. В § 1 уже отмечались различия в схемах редукции. Однако главное состоит в том, что в атоме и ядре составные части и общая структура в основном известны, а в физике элементарных частиц их еще предстоит выяснить. а также установить происхождение наблюдаемых симметрий.

На основе открытия большого числа новых адронов и экспериментального установления правил отбора в реакциях были получены SU_3- и SU_6-симметрии элементарных частиц [71, 72, 78—81]. В их происхождении нет окончательной ясности до сих пор. Характерно также отсутствие какой-либо связи между унитарной симметрией и релятивистской инвариантностью. Попытки согласования этих симметрий, равно как и попытки динамического обоснования SU_3 и SU_6, к решающему успеху не привели. Теоретическому рассмотрению симметрий элементарных частиц был посвящен в последние годы целый ряд работ (см., например, обзоры [74—77]). Однако бо́льшая часть этих исследований носила характер догадок, случайности и не привела к каким-либо реальным результатам. Это породило в известной степени отрицательную реакцию к теоретическому исследованию симметрий. Необходимо, однако, указать, что исследование такой сложной физической системы, как адроны, может быть эффективным только при использовании адекватного группового аппарата — теории коэффициентов КГ и их взаимосвязи. В работе [9] на основе свойств симметрии коэффициентов КГ был дан однозначный способ классификации инвариантов группы SU_2 по представлениям группы SU_3 и инвариантов группы $SL\,(2C)$ по представлениям $SL\,(3C)$ или ее подгруппы SU_3. Полученные при этом трансформационные свойства лагранжианов были сопоставлены со свойствами симметрии элементарных частиц.

Рассмотрим инварианты группы SU_2 в форме (1.2). Сопоставляя их со сверткой группы SU_3 (1.34), имеем (ср. (1.35))

$$\frac{U_1^{R_{11}}U_2^{R_{12}}U_3^{R_{13}}}{(R_{11}!\,R_{12}!\,R_{13}!)^{1/2}} = \sqrt{(J+1)!}\sum_{\sum\limits_i R_{2i}=J}\left\|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{matrix}\right\|\frac{\prod\limits_i v_i^{R_{2i}}w_i^{R_{3i}}}{\left(\prod\limits_i R_{2i}!\,R_{3i}!\right)^{1/2}}. \tag{6.15}$$

Правая часть равенства (6.15) представляет собой нормированное произведение степеней миноров детерминанта Δ и в соответствии с (6.19) является инвариантом группы SU_2:

$$\frac{1}{\sqrt{R_{11}!\,R_{12}!\,R_{13}!}}\begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix}^{R_{11}}\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix}^{R_{12}}\begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}^{R_{13}} =$$

$$= \sum_{m_1+m_2+m_3=0}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\psi^{j_1}_{m_1}\psi^{j_2}_{m_2}\psi^{j_3}_{m_3}. \tag{6.16}$$

Здесь

$$\psi^{j_i}_{m_i} = \left[\frac{(2j_i)!}{(j_i+m_i)!\,(j_i-m_i)!}\right]^{1/2} v_i^{j_i+m_i}w_i^{j_i-m_i},\quad R_{1i} = j_1+j_2+j_3-2j_i.$$

Из (6.15) и (6.16) получаем

$$\frac{U_1^{R_{11}}U_2^{R_{12}}U_3^{R_{13}}}{(R_{11}!\,R_{12}!\,R_{13}!)^{1/2}} = \sum_{\sum\limits_i m_i=0}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\psi^{j_1}_{m_1}\psi^{j_2}_{m_2}\psi^{j_3}_{m_3}. \tag{6.17}$$

Таким образом, компоненты базисного вектора группы SU_3 можно рассматривать как определенный инвариант группы SU_2. Справедливо и об-

ратное. Любые инварианты группы SU_2 в форме (6.16) могут рассматриваться как базисные векторы в пространстве представления SU_3. Полный базис представления SU_3 можно записать в виде

$$\sqrt{(J_1+1)!\,(J_2+1)!}\sum\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{Vmatrix}\frac{\prod\limits_i v_i^{A_{2i}} w_i^{A_{3i}}}{\left(\prod\limits_i A_{2i}!\,A_{3i}!\right)^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_i V_i^{B_{2i}} W_i^{B_{3i}}}{\left(\prod\limits_i B_{2i}!\,B_{3i}!\right)^{1/2}}, \qquad (6.18)$$

где контравариантные компоненты определяются обращением свертки в нуль.

Рассмотрение свойств коэффициентов КГ для группы $SL\,(2C)$, соответствующей собственной группе Лоренца, вполне аналогично проведенному выше для SU_3. Инварианты $SL\,(2C)$ образуют базис представления группы $SL\,(3C)$. Векторы e^{PQ} канонического базиса, соответствующего представлению $\tau\,(PQ)$ группы $SL\,(2C)$, выражаются через векторы $e'^{P_1Q_1}_{p_1q_1}$ и $e''^{P_2Q_2}_{p_2q_2}$, соответствующие представлениям $\tau\,(P_1Q_1)$ и $\tau\,(P_2Q_2)$, следующим образом [31]:

$$e^{PQ}_{pq} = \sum_{p_1q_1p_2q_2}(P_1P_2p_1p_2\,|\,Pp)(Q_1Q_2p_1q_2\,|\,Qq)\,e'^{P_1Q_1}_{p_1q_1}e''^{P_2Q_2}_{p_2q_2}. \qquad (6.19)$$

В правой части (6.19) находятся обычные коэффициенты КГ, которые можно записать в виде 3×3-символов. Соответственно любой инвариант группы Лоренца может быть представлен в виде

$$\sum_{\substack{p_1p_2p_3\\ q_1q_2q_3}}\begin{Vmatrix} -P_1+P_2+P_3 & P_1-P_2+P_3 & P_1+P_2-P_3 \\ P_1-p_1 & P_2-p_2 & P_3-p_3 \\ P_1+p_1 & P_2+p_2 & P_3+p_3 \end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} -Q_1+Q_2+Q_3 & Q_1-Q_2+Q_3 & Q_1+Q_2-Q_3 \\ Q_1-q_1 & Q_2-q_2 & Q_3-q_3 \\ Q_1+q_1 & Q_2+q_2 & Q_3+q_3 \end{Vmatrix}\psi^{P_1Q_1}_{p_1q_1}\psi^{P_2Q_2}_{p_2q_2}\psi^{P_3Q_3}_{p_3q_3}. \qquad (6.20)$$

Инвариант (6.20) определяется шестью индексами:

$$\pi_1 = -P_1+P_2+P_3, \quad \pi_2 = P_1-P_2+P_3, \quad \pi_3 = P_1+P_2-P_3,$$
$$\varkappa_1 = -Q_1+Q_2+Q_3, \quad \varkappa_2 = Q_1-Q_2+Q_3, \quad \varkappa_3 = Q_1+Q_2-Q_3, \qquad (6.21)$$
$$\pi_1+\pi_2+\pi_3 = P_1+P_2+P_3 = \pi, \quad \varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3 = Q_1+Q_2+Q_3 = \varkappa.$$

3×3-символы в (6.20) в отличие от (6.18) независимы (вследствие независимости индексов P и Q для базисных векторов группы Лоренца). Поскольку SU_3 — подгруппа $SL\,(3C)$, то каждый релятивистский инвариант является базисным вектором некоторого представления SU_3, в общем случае приводимого. Процедура приведения аналогична редукции представления группы Лоренца к представлению группы вращений

$$\psi^{PQ}_{pq}\sum(PQpq|\,Rr)\,\varphi^R_r. \qquad (6.22)$$

Итак, любой релятивистский инвариант с определенным порядком сложения ψ_i можно рассматривать как базисный вектор в пространстве, преобразующемся по представлению SU_3. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть в (6.20) ψ_1 преобразуется по представлению $\tau(0\,{}^1/_2)$, ψ_2 — по $\tau({}^1/_2\,0)$, ψ_3 — по $\tau(00)$, тогда соответствующий инвариант имеет вид

$$\sum_{p_1p_2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^1/_2-p_1 & {}^1/_2-p_2 & 0 \\ {}^1/_2+p_1 & {}^1/_2+p_2 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\psi^{1/2}_{1p_1}\psi^{1/2}_{2p_2}\psi^{1/2}_{3p_3} \tag{6.23}$$

Запишем символически соответствие между представлениями группы Лоренца, по которым преобразуются базисные векторы ψ_1, ψ_2, ψ_3, их порядком сложения и базисным вектором представления

$$[\tau({}^1/_2 0)\,\tau({}^1/_2 0)\,\tau(00)] \qquad ({}^1/_2\,{}^1/_2 0)(000) \to [100]\,[000]. \tag{6.24}$$

Если базисные векторы ψ_i переставить, то имеем

$$[\tau({}^1/_2 0)\,\tau(00)\,\tau({}^1/_2 0)] \qquad ({}^1/_2 0\,{}^1/_2)(000) \to [010]\,[000]. \tag{6.25}$$

В общем случае инварианты, отличающиеся порядком ψ_1, ψ_2, ψ_3, образуют шесть компонент базисных векторов некоторого представления SU_3. (Для построения полного базиса необходимо, вообще говоря, использовать инварианты с другими ψ_1, ψ_2, ψ_3.) Три инварианта (6.23) с фиксированным порядком сложения дают три базисных представления $D\,(10)$ группы SU_3. Аналогично строится базис комплексно-сопряженного представления $D\,(01)$.

Для базиса представления $D\,(30)$ имеем:

$$\begin{aligned} &[\tau({}^3/_2 0)\,\tau(00)\,\tau({}^3/_2 0)] && ({}^3/_2\,{}^3/_2 0)(000) \to [003]\,[000] && 3, \\ &[\tau({}^3/_2 0)\,\tau(10)\,\tau({}^1/_2 0)] && ({}^3/_2\,1\,{}^1/_2)(000) \to [012]\,[000] && 6, \\ &[\tau(10)\,\tau(10)\,\tau(10)] && (111)(000) \to [111]\,[000] && 1. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Справа приведено число различных перестановок ψ_1, ψ_2, ψ_3. Всего имеем десять инвариантов с фиксированным порядком столбцов.

Рассмотрим пример приводимого базиса:

$$\begin{aligned} &[\tau({}^1/_2 0)\,\tau(0\,{}^1/_2)\,\tau({}^1/_2\,{}^1/_2)] && ({}^1/_2 0\,{}^1/_2)(0\,{}^1/_2\,{}^1/_2) \to [010]\,[100] && 6, \\ &[\tau({}^1/_2\,{}^1/_2)\,\tau({}^1/_2\,{}^1/_2)\,\tau(00)] && ({}^1/_2\,{}^1/_2 0)({}^1/_2\,{}^1/_2 0) \to [001]\,[001] && 3. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Восемь векторов соответствуют в (6.27) базису $D\,(11)$, один вектор (свертка) — базису $D\,(00)$.

Для простейших случаев индексы $[\pi_1\pi_2\pi_3]\,(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3]$, стоящие в квадратных скобках (формулы (6.24)—(6.27)), непосредственно характеризуют базисные векторы $M\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3\end{pmatrix}$ представления $D\,(\pi\varkappa)$ группы SU_3 в симметрическом базисе [5]. Наряду с индексами $\pi_i\varkappa_i$ можно формально использовать другие индексы: π, $\varkappa$, гиперзаряд $Y = \varkappa_1 - \pi_1 + {}^1/_3\,(\pi - \varkappa)$ изоспин T и проекцию изоспина $t = {}^1/_2\,(\pi_2 - \pi_3 + \varkappa_3 - \varkappa_2)$.

В указанном смысле любой лагранжиан, любой релятивистский инвариант характеризуются гиперзарядом, изоспином и его проекцией (или определенным набором этих чисел). Например, инварианту $[\tau({}^3/_2\,0)\,\tau\times$ $\times(00)\,\tau({}^3/_2\,0)]$ соответствуют три базисные вектора, отличающиеся порядком сложения ψ_1, ψ_2, ψ_3 и преобразующиеся по $D\,(30)$:

$$\begin{aligned} &[300]\,[000] && Y = -2 && t = 0, \\ &[030]\,[000] && Y = 1 && t = {}^3/_2, \\ &[003]\,[000] && Y = 1 && t = -{}^3/_2. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Инварианту $[\tau(^1/_2\,0)\,\tau(^1/_2\,0)\,\tau(00)]$ соответствуют три состояния (кварка), преобразующихся по представлению D (10):

$$\begin{array}{llll} „\Lambda" & [100]\,[000] & Y = -^2/_3 & t = 0, \\ „p" & [010]\,[000] & Y = ^1/_3 & t = ^1/_2, \\ „n" & [001]\,[000] & Y = ^1/_3 & t = -^1/_2. \end{array} \tag{6.29}$$

Отметим, что такая классификация может быть применена не только к инвариантам, но и к токам, поскольку существенным моментом является наличие коэффициента КГ.

Теория коэффициентов КГ дает однозначный рецепт для классификации релятивистских инвариантов по представлениям группы SU_3. При этом каждый из тензоров, образующих инвариант, в отличие от него не является базисным вектором какого-либо представления SU_3, т. е. появляется новая симметрия, характеризующая взаимодействия и соответствующие лагранжианы. Проведем согласно предложенному методу классификацию взаимодействий элементарных частиц по представлениям группы SU_3. Рассмотрим лагранжиан слабого взаимодействия

$$\bar{\psi}_a\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_b\bar{\psi}_c\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_d. \tag{6.30}$$

Записав это выражение через 3×3-символы, получаем, что по своим трансформационным свойствам слабый ток принадлежит к октетному представлению группы SU_3 и согласно изложенному соответствует следующим шести базисным векторам D (11):

$$[010]\,[001],\ [001]\,[010],\ [100]\,[001],\ [100]\,[010],\ [010]\,[100],\ [001]\,[100]. \tag{6.31}$$

Первые два вектора соответствуют $Y = 0$, $t = +1$, т. е. относятся к токам, сохраняющим странность. Остальные векторы соответствуют $Y = +1$, $t = ^1/_2$, т. е. токам, не сохраняющим странность. Лагранжиан слабого взаимодействия, как видно из (6.30), также является членом октета SU_3.

Такие же трансформационные свойства были приписаны лагранжиану и току Кабиббо [196] из экспериментальных правил отбора в слабых взаимодействиях с учетом адронов. (Разумеется, для чисто лептонного взаимодействия, которое не классифицируется исходя из правил отбора, такого сопоставления провести нельзя.) Лагранжиан электромагнитного взаимодействия $(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\,A_\mu$ является суммой двух инвариантов, построенных из трех представлений группы Лоренца $[\tau(0\,^1/_2)\,\tau(^1/_2\,^1/_2)\,\tau(^1/_2\,0)]$, и, следовательно, представляет собой неполный набор базисных векторов октета группы SU_3. Для электромагнитного взаимодействия также нет противоречия между трансформационными свойствами лагранжиана, вытекающими из теории коэффициентов КГ, и свойствами, полученными из правил отбора.

Факт получения правильных трансформационных свойств для электромагнитных и слабых взаимодействий адронов указывает на возможность нового подхода к проблеме происхождения SU_3-симметрии. При таком подходе адроны так же, как это имеет место и в модели кварков, предполагаются состоящими из субчастиц; однако в отличие от модели кварков субчастицы не описываются квантовыми числами π, $\varkappa$, Y, T, t, которые характеризуют лишь их взаимодействия. В силу последнего обстоятельства эти квантовые числа могут быть приписаны адронным состояниям. Поскольку в лагранжиане, построенном в форме (6.20), индексы первых строк символа Редже $\pi_i\,\varkappa_i$ относятся к внутренним переменным, а индексы $P-p$, $P+p$, $Q-q$, $Q+q$ — к спиновым, то симметрия символа Редже относительно транспонирования соответствует симметрии спиновых и за-

рядовых состояний адронов SU_6. С индексами $\pi_2\pi_3\,\varkappa_2\varkappa_3$ можно связать релятивистское представление $\theta\,(PQ)$, действующее в обобщенном изотопическом пространстве, где изоспин T относится к представлению $\theta\,(PQ)$ как обычный спин к представлению $\tau\,(PQ)$, и на этой основе строить теорию, симметричную относительно внутренних и пространственных переменных. Следствием такого подхода являются определенные ограничения на допустимые лагранжианы взаимодействия. Интересной иллюстрацией симметрии спина и изоспина является работа [197], где состояния с проекцией спина $^1/_2$ и $-^1/_2$ трактуются как отдельные частицы и развивается идея теории оболочек с несвязанными спинами.

В целом теория коэффициентов КГ может явиться исходным пунктом для анализа симметрий и структуры элементарных частиц. При этом немаловажным фактором является дальнейшее развитие самой теории коэффициентов КГ, включая создание теории коэффициентов КГ некомпактных групп.

§ 4. Молекулы

Для молекул характерно богатство спектров, а также исключительное разнообразие и сложность структур. Теория молекул явилась областью широкого применения групповых методов (классификация и расщепление термов, правила отбора, вопросы устойчивости и т. п.), основанных на теории характеров точечных групп. Однако, как уже отмечалось, теория характеров включает в себя отнюдь не всю информацию, вытекающую из факта симметрии. Поэтому, несмотря на важность приложений, полученные до сих пор результаты являются незначительными по сравнению с возможностями теории коэффициентов КГ. Интересно отметить, что уже ряд традиционных вопросов молекулярной физики может быть представлен на групповом языке коэффициентов КГ. Это относится и к вращательным, и к колебательным, и к электронным спектрам. Так, например, в работе Гато и Ябуки [198] было показано, что вращения твердого тела могут быть описаны в терминах двухкомпонентных спиноров. Здесь открывается возможность распространения теории коэффициентов КГ на вращательные спектры молекул. В этой связи представляет интерес также работа Бинсера [43], где обсуждается связь матриц конечных вращений $D^j_{mm'}$ (являющихся волновыми функциями симметричного волчка) с симметрией Редже.

В работе [15] отмечалось, что колебательные уровни с номером p для двух- и трехкратных частот описываются представлениями $D\,(P)$ и $D\,(P0)$ групп SU_2 и SU_3. Как степени вырождения $p+1$ и $^1/_2\,(p+1)\,(p+2)$, так и величины расщепления уровней определяются чисто групповыми соотношениями. Таким образом, и для рассмотрения вырожденных колебаний может быть применена теория коэффициентов КГ. Не исключено, что задача исследования колебаний молекулы в целом также может быть в значительной степени переведена на язык этой теории (с использованием неинвариантных групп). В теории молекул при нахождении нормальных колебаний используются коэффициенты симметрии, задающие преобразования от естественных координат к координатам симметрии [199, 200]. Коэффициенты симметрии являются коэффициентами редукции для точечных групп. Выше уже отмечалось, что для точечных групп могут быть использованы аппарат теории угловых моментов и базис $z_1^{p_1}z_2^{p_2}/\sqrt{p_1!p_2!}$. Таким образом, и эти вопросы связаны с теорией коэффициентов КГ.

Известны трудности расчетов электронных состояний молекул на ЭВМ. Можно приближенно считать лишь самые простые молекулы, и для каждой из них приходится проводить расчеты независимо от других. В настоящее время имеются определенные указания на существование некоторых сим-

метричных координат, в которых результаты могут быть получены достаточно просто или записаны сразу. Эти координаты являются определенными комбинациями расстояний и углов, т. е. естественных координат. Трудности будут иметь место в переходе между естественными и симметричными координатами.

Если эта точка зрения правильна, то работы в направлении группового (исчисление коэффициентов КГ) исследования молекул являются перспективными и очень важными в прикладном отношении. Определенным подтверждением указанной точки зрения являются работы [90—94]. Остановимся на работе Аллилуева и Матвеенко [91], посвященной простейшей молекуле — иону H_2^+. В работе показано, что для H_2^+ существует более широкая группа симметрии, чем геометрическая O_2, а именно $SO_2 \times \times SO_2 \times O_2$. Получено выражение для собственной функции в некоторых симметричных координатах (z_1, z_2, Φ)

$$\psi_{n_1 n_2 m} = \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{\sqrt{n_1!\, n_2!}} \frac{e^{im\Phi}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{6.32}$$

В работе формулы для связи z_1, z_2, Φ с естественными координатами не получены. Однако они могут быть выведены из [201—203], где найдено аналитическое решение H_2^+.

Результаты работы [91] могут быть обобщены. Определенная совокупность решений (6.32) может быть объединена и служить базисом представления более высших групп (являющихся группами неинвариантности). Так, например, совокупность величин $z_1^{n_1} z_2^{n_2} / \sqrt{n_1! n_2!}$ может рассматриваться как базис представления группы SU_2, а (6.32) — как базис O_4. Таким образом, обобщенная симметрия Фока [204] может быть существенной и для молекул. Как отмечалось в [90], движение электрона в поле нескольких кулоновских центров может быть также классифицировано по более широкой группе — группе 0 (4,1). Здесь, как и в теории атома и элементарных частиц, некомпактные группы могут играть важную роль.

§ 5. Теория излучения

Сравнительно новой областью применения групповых методов являются вопросы теории излучения. Основной шаг здесь был сделан Дике [205], применившим аппарат теории угловых моментов. Теория Дике относится к когерентным коллективным состояниям излучающих молекул и описывает сложную систему, состоящую из большого числа излучателей. В работе [205] рассмотрена идеализированная модель молекулы с двумя энергетическими уровнями. Эти молекулы, имеющие два состояния, описываются спиновыми операторами r_j (энергетический спин), соответствующими спину $^1/_2$. Для системы двухуровневых молекул вводится суммарный энергетический спин

$$R = \sum_j r_j. \tag{6.33}$$

Согласно [205], в качестве стационарных состояний системы n молекул с двумя уровнями можно выбрать собственные состояния оператора R^2, коммутирующего с гамильтонианом $H = H_0 + \varepsilon_{12} R_3$ (ε_{12} — расстояние между уровнями):

$$R^2 \psi_{rm} = r(r+1)\psi_{rm}, \qquad R_3 \psi_{rm} = m\psi_{rm}, \tag{6.34}$$

где $m = {}^1/_2 (N_2 - N_1)$, т. е. m равно полуразности заселенностей уровней.

Интенсивность спонтанного излучения I определяется матричными элементами оператора взаимодействия молекул с полем излучения

$$I = I_0(r+m)(r-m+1), \tag{6.35}$$

где I_0 — интенсивность спонтанного излучения изолированной молекулы.

При всех переходах системы, сопровождающихся излучением, квантовое число r не меняется (R^2 — интеграл движения). Возможны особые связанные состояния системы, когда интенсивность спонтанного излучения пропорциональна квадрату числа молекул (сверхизлучающие состояния):

$$r = {}^1/_2 n, \qquad m = 0, \qquad I \sim {}^1/_4 n^2 I_0. \tag{6.36}$$

В общем случае

$$I = I_0 \sum_{rm} p_{rm}(r+m)(r-m+1), \tag{6.37}$$

где p_{rm} — вероятность нахождения системы в состоянии (rm).

Ряд вопросов, связанных с созданием сверхизлучающих состояний, с шириной и формой линий, с анализом свойств когерентного излучения, рассмотрен в [206—208]. Однако при этом во всех случаях рассматривались двухуровневая схема и невзаимодействующие молекулы. В работе [15] был указан путь обобщения методики Дике в направлении учета многоуровневости.

Если взаимодействие с полем носит резонансный характер, то, как правило, двухуровневая схема является хорошим приближением. Однако для ряда задач (в частности, при описании взаимодействия с очень интенсивными потоками излучения, при рассмотрении излучения системы с учетом релаксации по уровням существен учет многоуровневости. Если состояния системы молекул с двумя уровнями описываются, согласно Дике, представлениями группы SU_2, то системы с тремя, четырьмя и более уровнями описываются представлениями, соответствующими группам SU_3, SU_4, SU_5 ,... Расчетный аппарат [205] непосредственно обобщается для произвольного числа уровней. Рассмотрим трехуровневую систему с интервалами энергии ε_{12}, ε_{13}, ε_{23} ($\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13}$) между уровнями 1, 2, 3. Гамильтониан в случае $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23}$ имеет вид

$$H = \varepsilon_{13}({}^3/_4 Y + {}^1/_2 t). \tag{6.38}$$

Здесь Y — гиперзаряд; T, t — изоспин и его проекция, причем $t = {}^1/_2 \times \times (N_2 - N_1)$.

Волновые функции ψ_{PTt} индицируются тремя квантовыми числами P, T, t. Нетрудно видеть, что при любых радиационных процессах в трехуровневой системе число P остается неизменным. Степень когерентности задается числами T и P в отличие от двухуровневой схемы, где достаточно было одного кооперационного числа r. Формулы для интенсивности излучения определяются этими числами. Конкретные зависимости, а также возможные эксперименты в многоуровневых системах детально рассмотрены в работе [22], помещенной в данном сборнике. Не останавливаясь на них, отметим лишь важность сочетания многоуровневого подхода в релаксации [209—213] и в излучении, которое может оказаться существенным при анализе возможностей использования многоуровневой системы для оптической накачки лазеров (ср. [210]), а также при анализе методов создания сверхизлучающих состояний.

На основе группового подхода можно рассматривать и ряд других вопросов теории излучения. Кратко остановимся на корреляции излучателей вследствие их взаимодействия [15]. Учет согласования излучения молекул (в фазе и противофазе) проводится с помощью одного параметра — коо-

перационного числа r. Простейшая модель, учитывающая корреляцию, во многом напоминает ферромагнетик. Излучение молекул коррелировано по группам: k излучателей согласовано (кооперационное число для этой группы равно $k/2$). Каждая из этих групп излучает независимо. При этом суммарный энергетический спин r является результатом сложения n/k энергетических спинов $k/2$ (в отличие от сложения n спинов $^1/_2$ в модели Дике). Вычисляя интенсивность по формуле (6.37) и сравнивая ее с экспериментально наблюдаемой, можно вычислить число коррелирующих молекул. (В частных случаях, когда все излучатели согласованы, когда имеются две группы, три группы ,..., получаем $r = n/2$, $r = n/4$, $r \sim n/6$.)

В этой связи отметим эксперимент [214], где производились измерения абсолютной интенсивности комбинационного рассеяния в жидком и кристаллическом состояниях вещества (стильбен, бензол). При этом интенсивность для кристаллического состояния приблизительно в 20 раз больше, чем для жидкого. Предполагая, что излучатели в кристалле коррелируют, а в жидкости не коррелируют, и используя формулу (6.37), имеем

$$I_{\text{тв}}/I_{\text{ж}} \approx \sum_m p_{rm}(r-m). \tag{6.39}$$

Оценки по этой формуле показывают, что в условиях эксперимента (при различных модельных предположениях) коррелируют десятки молекул, Если эта интерпретация справедлива, то появляется возможность исследования круга явлений, связанного со взаимодействием колебаний в твердом теле, методами коэффициентов КГ.

В целом групповая трактовка вопросов излучения и когерентности состояний разработана еще недостаточно, хотя этим вопросам уделяется весьма большое внимание [215]. Однако перспективы применения аппарата коэффициентов КГ (в том числе коэффициентов КГ высших групп) представляются интересными. Отметим, что и формализм матрицы плотности, играющий важную роль в теории излучения, также может быть переведен на групповой язык.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование, проведенное в настоящей работе, охватывает обобщенную теорию угловых моментов, высшие симметрии, физические симметрии. В него фактически не включен ряд важных вопросов как теории коэффициентов КГ, так и их приложений, например, некомпактные группы. кристаллографические группы, приложения групп Галуа в вопросах кодирования и связи, приложения групп к твердому телу и т. д. Однако уже из проведенного рассмотрения ясно, что мы имеем дело с некоторым мощным универсальным исчислением, проникающим в большое число областей математики и находящим обширные физические применения. Теория высших симметрий и теория инвариантных уравнений оказываются просто специальными разделами обобщенной теории угловых моментов. С помощью аппарата коэффициентов КГ открывается возможность единого подхода к сложным физическим системам, на основе которого можно ставить задачи дешифровки структуры элементарных частиц (адронов) и создания эффективных расчетных методов для молекул. Дальнейшее развитие как математических, так и физических аспектов теории коэффициентов КГ может привести к далеко идущим фундаментальным последствиям. Оценить их в полном объеме пока представляется затруднительным, поскольку рассмотренные вопросы находятся в большинстве своем в процессе становления, и данная работа отображает скорее динамику процесса, чем законченную проблему. Можно ожидать также, что недооценка теории коэффициентов КГ, непонимание ее истинного значения и роли отойдут в прошлое.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО КОМПАКТНЫМ ГРУППАМ ЛИ

В приложении приводится ряд таблиц, содержащих справочный материал по компактным группам Ли (SU_n, ортогональным, симплектическим, особым), имеющий самостоятельное значение. Табл. I содержит размерности алгебр Ли и размерности фундаментальных представлений. Сигнатура определяется базисом Картана — Вейля. В табл. II вычислены корни, причем приводятся только корни со знаком плюс (наряду с ними имеются корни той же величины, но со знаком минус). Табл. III содержит формулы разностей представлений. В табл. IV приведено несколько примеров для весов представлений групп SU_3 и SU_4. Табл. IV содержит формулы ветвления, охватывающие ряд практически важных случаев. Следует отметить единообразие данной таблицы: все приведенные формулы соответствуют каноническому базису, определенному стандартной формой инфинитезимальных операторов. Она включает большинство формул, необходимых для справочных целей при групповом рассмотрении конкретных систем в атомной и ядерной спектроскопии. Величины в квадратных скобках в этой таблице означают целую часть числа.

Таблица I

Алгебры Ли и представления групп Ли

Группа		Алгебра Ли		Фундаментальные представления		Группа		Алгебра Ли		Фундаментальные представления	
		представление	размерность	представление	размерность			представление	размерность	представление	размерность
A_1	SU_2	$D(2)$	3	$D(1)$	2	C_4	Sp8	$D(2000)$	36	$D(1000)$	8
A_2	SU_3	$D(11)$	8	$D(10)$	3					$D(0100)$	27
				$D(01)$	3					$D(0010)$	48
A_3	SU_4	$D(101)$	15	$D(100)$	4					$D(0001)$	42
				$D(010)$	6	D_4	O_8	$D(0100)$	28	$D(1000)$	8
				$D(001)$	4					$D(0100)$	28
A_4	SU_5	$D(1001)$	24	$D(1000)$	5					$D(0010)$	8
				$D(0100)$	10					$D(0001)$	8
				$D(0010)$	10	G_2		$D(01)$	14	$D(10)$	7
				$D(0001)$	5					$D(01)$	14
A_5	SU_6	$D(10001)$	35	$D(10000)$	6	F_4		$D(0100)$	52	$D(1000)$	26
				$D(01000)$	15					$D(0100)$	52
				$D(00100)$	20					$D(0010)$	1274
				$D(00010)$	15					$D(0001)$	273
				$D(00001)$	6			$O_5^c \subset O_5$		$D(10)$	5
B_2	O_5	$D(02)$	10	$D(10)$	5					$D(01)$	10
				$D(01)$	4					$D(100)$	6
B_3	O_7	$D(010)$	21	$D(100)$	7			$O_6^c \subset O_6$		$D(010)$	15
				$D(010)$	21					$D(001)$	20
				$D(001)$	8			$O_7^c \subset O_7$		$D(100)$	7
B_4	O_9	$D(0100)$	36	$D(1000)$	9					$D(010)$	21
				$D(0100)$	36					$D(001)$	35
				$D(0010)$	84			$O_8^c \subset O_8$		$D(1000)$	8
				$D(0001)$	16					$D(0100)$	28
C_2	Sp4	$D(20)$	10	$D(10)$	4					$D(0010)$	56
				$D(01)$	5					$D(0001)$	70
C_3	Sp6	$D(200)$	21	$D(100)$	6						
				$D(010)$	14						
				$D(001)$	14						

Таблица I

Корни алгебры Ли

A_1	α_1
A_2	$\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1+\alpha_2$
A_3	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$
A_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4;$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$
A_5	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$ $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$
B_2	$\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1+\alpha_2; \alpha_1+2\alpha_2$
B_3	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+2\alpha_3; \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,$ $\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$
B_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3; \alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,$ $\alpha_3+2\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,$ $\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4; \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4$
B_5	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$ $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5, \alpha_4+2\alpha_5, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ $\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5, \alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5, \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5$ $\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5;$ $\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5$
C_3	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3; \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3;$ $2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$
C_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,$ $2\alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4;$ $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, 2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4;$ $2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$
D_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$
D_5	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_3+\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$ $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,$ $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5,$ $\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5; \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5; \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$
G_2	$\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1+\alpha_2; \alpha_1+2\alpha_2; \alpha_1+3\alpha_2; 2\alpha_1+3\alpha_2$
F_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3,$ $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4;$ $2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, 2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4,$ $2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4; 2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4;$ $2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4; 2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4; 2\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4;$ $2\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$

Таблица III

Формулы размерности представлений

Группа	Представление	Размерность
SU_2	$D(\lambda)$	$\lambda+1$
SU_3	$D(\lambda_1\lambda_2)$	$(2)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)$
SU_4	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$	$(2!\,3!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\lambda_2+\lambda_3+2)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)$
SU_5	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$	$(2!\,3!\,4!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_4+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_3+\lambda_4+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+4)$
SU_6	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)$	$(2!\,3!\,4!\,5!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_4+1)(\lambda_5+1)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+2)(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_3+\lambda_4+2)(\lambda_4+\lambda_5+2)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+3)(\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+3)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+4)(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+4)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+5)$
Sp 4	$D(\lambda_1\lambda_2)$	$(2\cdot3)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(2\lambda_1+\lambda_2+3)$
Sp 6	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$	$(3!\,5!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_2+2\lambda_3+3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+4)(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+5)$
Sp 8	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$	$(3!\,5!\,7!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_4+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_3+\lambda_4+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+3)(\lambda_3+2\lambda_4+3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+4)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+4)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+5)\times$ $\times(\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4+5)(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4+6)\times$ $\times(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4+7)$
O_7	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$	$(3!\,5!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)(\lambda_3+2\lambda_2+3)\times$ $\times(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+4)(2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+5)$
O_9	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$	$(3!\,5!\,7!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_4+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_3+\lambda_4+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+3)(2\lambda_3+\lambda_4+3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+4)\times$ $\times(\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4+4)(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4+5)\times$ $\times(2\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4+5)(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4+6)\times$ $\times(2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4+7)$
O_8	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$	$(3!\,6!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_4+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_2+\lambda_4+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)\times$ $\times(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+3)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+4)(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+5)$
G_2	$D(\lambda_1\lambda_2)$	$(5!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(2\lambda_2+\lambda_1+3)\times$ $\times(\lambda_1+3\lambda_2+4)(2\lambda_1+3\lambda_2+5)$

Таблица III (окончание)

Группа	Представление	Размерность
F_4	$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$	$(5!\,7!\,11!)^{-1}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)(\lambda_4+1)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+2)(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_3+\lambda_4+2)(\lambda_1+$ $+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+3)(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+3)(\lambda_2+2\lambda_3+3)\times$ $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+4)(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+4)(2\lambda_3+\lambda_2+\lambda_4+4)\times$ $\times(\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4+5)(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+5)\times$ $\times(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4+5)(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4+6)\times$ $\times(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4+6)(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4+7)\times$ $\times(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4+7)(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+2\lambda_4+8)\times$ $\times(\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3+2\lambda_4+9)(\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3+2\lambda_4+10)\times$ $\times(2\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3+2\lambda_4+11)$

Таблица IV

Веса представлений

SU_3		SU_4
$D(10)\quad M=M_1$	$D(11)\quad M=M_1+M_2$	$D(100)\quad M=M_1$
M	M	M
$M-\alpha_1$	$M-\alpha_1$	$M-\alpha_1$
$M-\alpha_1-\alpha_2$	$M-\alpha_2$	$M-\alpha_1-\alpha_2$
	$M-\alpha_1-\alpha_2$	$M-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$
$D(20)\quad M=2M_1$	$M-\alpha_1-2\alpha_2$	$D(200)\ M=2M_1$
M	$M-2\alpha_1-\alpha_2$	M
$M-\alpha_1$	$M-2\alpha_1-2\alpha_2$	$M-\alpha_1$
$M-2\alpha_1$		$M-\alpha_1-\alpha_2$
$M-\alpha_1-\alpha_2$	$D(21)\quad M=2M_1+M_2$	$M-2\alpha_1-\alpha_2$
$M-2\alpha_1-\alpha_2$	M	$M-2\alpha_1-2\alpha_2$
$M-2\alpha_1-2\alpha_2$	$M-\alpha_1$	$M-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$
	$M-2\alpha_1$	$M-2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$
$D(30)\quad M=3M_1$	$M-\alpha_2$	$M-2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$
M	$M-\alpha_1-\alpha_2$	$M-2\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3$
$M-\alpha_1$	$M-\alpha_1-2\alpha_2$	
$M-2\alpha_1$	$M-2\alpha_1-\alpha_2$	$D(010)\ M=M_2$
$M-3\alpha_1$	$M-2\alpha_1-2\alpha_2$	M
$M-\alpha_1-\alpha_2$	$M-2\alpha_1-3\alpha_2$	$M-\alpha_2$
$M-2\alpha_1-\alpha_2$	$M-3\alpha_1-\alpha_2$	$M-\alpha_1-\alpha_2$
$M-2\alpha_1-2\alpha_2$	$M-3\alpha_1-2\alpha_2$	$M-\alpha_2-\alpha_3$
$M-3\alpha_1-\alpha_2$	$M-3\alpha_1-3\alpha_2$	$M-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$
$M-3\alpha_1-2\alpha_2$		$M-\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$
$M-3\alpha_1-3\alpha_2$		

ФОРМУЛЫ ВЕТВЛЕНИЯ

I. $SU_n \to SU_{n-1}$

1) $SU_3 \to SU_2$, $$D(P, Q) = \sum_{k=0}^{Q} \sum_{i=0}^{P} D(i+k);$$

2) $SU_4 \to SU_3$, $$D(P, Q, R) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} D(i+k, Q-k+l);$$

3) $SU_5 \to SU_4$, $$D(P, Q, R, S) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} \sum_{m=0}^{S} D(i+k, Q-k+R-l, l+m);$$

4) $SU_6 \to SU_5$, $$D(P, Q, R, S, T) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} \sum_{m=0}^{S} \sum_{n=0}^{T} D(i+k, Q+R-k-l, S-m+l, m+n);$$

5) $SU_7 \to SU_6$, $$D(P, Q, R, S, T, U) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} \sum_{m=0}^{S} \sum_{n=0}^{T} \sum_{j=0}^{U} D(i+k, Q-k+R-l, l+S-m, m+T-n, n+j).$$

II. $O_n^c \to O_{n-1}^c$

6) $O_3^c \to O_2^c$, $$D(P) = \sum_{m=0}^{P} D(m);$$

7) $O_4^c \to O_3^c$, $$D(P, Q) = \sum_{i=0}^{P} (2 - \delta_{0,Q}) D(i+Q);$$

8) $O_5^c \to O_4^c$, $$D(P, Q) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} D(i+k, Q-k);$$

9) $O_6^c \to O_5^c$, $$D(P, Q, R) = \sum_{k=0}^{Q} \sum_{i=0}^{P} (2 - \delta_{0,R}) D(i+k, Q-k+R);$$

10) $O_7^c \to O_6^c$, $$D(P, Q, R) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} D(i+k, Q-k+l, R-l);$$

11) $O_8^c \to O_7^c$, $$D(P, Q, R, S) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} (2 - \delta_{0,S}) D(i+k, Q-k+l, R-l+S);$$

12) $O_9^c \to O_8^c$, $$D(P, Q, R, S) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} \sum_{m=0}^{S} D(i+k, Q-k+l, R-l+m, S-m).$$

III. $O_n \to O_{n-1}$

13) $O_4 \to O_3$, $$D(PQ) = \sum_{i=0}^{\min(P, Q)} D(P+Q-2i);$$

14) $O_5 \to O_4$, $\quad D(P, Q) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} D(i+k, Q-k+i)$;

15) $O_6 \to O_5$, $\quad D(P, Q, R) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{\min(QR)} D(i+k, Q+R-2k)$;

16) $O_7 \to O_6$, $\quad D(P, Q, R) =$

$$= \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{R} D(i+k, Q-k+l, R-l+Q-k);$$

17) $O_8 \to O_7$, $\quad D(P, Q, R, S) =$

$$= \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{l=0}^{\min(R, S)} D(i+k, Q-k+l, R+S-2l).$$

IV. $\mathrm{Sp}(2n) \to \mathrm{Sp}(2n-2)$

18) $\mathrm{Sp}(4) \to \mathrm{Sp}(2)$, $\quad D(P, Q) = \sum_{l_1=Q}^{P+Q} \sum_{l_2=0}^{Q} \sum_{k=l_2}^{l_1} D(k)$;

19) $\mathrm{Sp}(6) \to \mathrm{Sp}(4)$, $\quad D(P, Q, R) = \sum_{l_1=Q+R}^{P+Q+R} \sum_{l_2=R}^{Q+R} \sum_{l_3=0}^{R} \sum_{k_1=l_2}^{l_1} \sum_{k_2=l_3}^{l_2} D(k_1, k_2)$;

20) $\mathrm{Sp}(8) \to \mathrm{Sp}(6)$,

$$D(P, Q, R, S) = \sum_{l_1=Q+R+S}^{P+Q+R+S} \sum_{l_2=R+S}^{Q+R+S} \sum_{l_3=S}^{R+S} \sum_{l_4=0}^{S} \sum_{k_1=l_2}^{l_1} \sum_{k_2=l_3}^{l_2} \sum_{k_3=l_4}^{l_3} D(k_1, k_2, k_3);$$

21) $\mathrm{Sp}(10) \to \mathrm{Sp}(8)$, $\quad D(P, Q, R, S, T) =$

$$= \sum_{l_1=Q+R+S+T}^{P+Q+R+S+T} \sum_{l_2=R+S+T}^{Q+R+S+T} \sum_{l_3=S+T}^{R+S+T} \sum_{l_4=T}^{S+T} \sum_{l_5=0}^{T} \sum_{k_1=l_2}^{l_1} \sum_{k_2=l_3}^{l_2} \sum_{k_3=l_4}^{l_3} \sum_{k_4=l_5}^{l_4} D(k_1, k_2, k_3, k_4),$$

V. $SU_{2n} \to \mathrm{Sp}(2n)$

22) $SU_4 \to \mathrm{Sp}(4)$, $\quad D(P, Q, R) = \sum_{i=0}^{\min(P, R)} \sum_{k=0}^{Q} D(P+R-2i, i+k)$;

23) $SU_6 \to \mathrm{Sp}(6)$, $\quad D(P, Q, R, S, T) = \sum_{m=0}^{\min(P, T)} \sum_{i=0}^{\min(Q, S)} \sum_{k=0}^{Q-i} \sum_{l=0}^{S-i} \sum_{n=0}^{R} \times$

$$\times D(P+T-2m+i+R-n, m+Q+S-2i-k-l, i+k);$$

24) $SU_8 \to \mathrm{Sp}(8)$, $\quad D(P, Q, R, S, T, U, V) = \sum_{i=0}^{\min(P, V)} \sum_{r=0}^{\min(Q, U)} \sum_{k=0}^{r} \sum_{l=0}^{r-k} \times$

$$\times \sum_{\alpha=0}^{Q-r} \sum_{\beta=0}^{U-r} \sum_{r'=0}^{\min(R, T)} \sum_{k'=0}^{r'} \sum_{l'=0}^{r'-k'} \sum_{\alpha'=0}^{R-r'} \sum_{\beta'=0}^{T-r'} \sum_{m=0}^{S} \sum_{\gamma=0}^{m} D(P+V-2i+l+k'+$$

$$+\alpha'+\beta', i+Q+U+l'+S-2r-\alpha-\beta-m, l+R+T-$$

$$-2r'-\alpha'-\beta', k+l'+m-\gamma).$$

VI. $SU_n \to O_n^c$

25) $SU_3 \to O_3^c$, $\quad D(PQ) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p-i}{2}\right]} \sum_{k=0}^{\left[\frac{Q-i}{2}\right]} D(P+Q-i-2k-2l)$;

26) $SU_4 \to O_4^c$, $$D(P0R) = \sum_{i=0}^{\min(P,R)} \sum_{k=0}^{\left[\frac{P-i}{2}\right]} \sum_{l=0}^{\left[\frac{R-i}{2}\right]} D(P+R-2i-2k-2l, i);$$

$$D(PQ0) = \sum_{s=0}^{1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{P-s}{2}\right]} \sum_{m=0}^{\left[\frac{Q}{2}\right]} \sum_{n=0}^{m} D(P-2l+2n, Q-2m-s);$$

27) $SU_5 \to O_5^c$, $$D(P00S) = \sum_{i=0}^{\min(P,S)} \sum_{k=0}^{\left[\frac{P-i}{2}\right]} \sum_{l=0}^{\left[\frac{S-i}{2}\right]} D(P+S-2i-2k-2l, i);$$

$$D(0QR0) = \sum_{\nu=0}^{1} \sum_{\alpha=0}^{\min(Q-\nu,\, R-\nu)} \sum_{i=0}^{\left[\frac{R-\alpha-\nu'}{2}\right]} \sum_{i'=0}^{\left[\frac{Q-\alpha-\nu}{2}\right]} \sum_{k=0}^{i} \sum_{k'=0}^{i'} D(\alpha+2k+2k'+$$
$$+\nu, Q+R-2\alpha-\nu-2i-2i').$$

VII. $O_7 \to G_2 \to SU_3$

28) $O_7 \to G_2$, $$D(PQR) = \sum_{l=0}^{R} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{\alpha=0}^{\min(P,k)} D(P-\alpha+Q-k+l, k);$$

29) $G_2 \to SU_3$, $$D(PQ) = \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{Q} \sum_{\alpha=0}^{i+k} D(Q+i-\alpha, Q+k+\alpha).$$

VIII. $G_i \times \ldots \times G_r \to G_l$ ($G_i = SU_n$ или O_5)

30) $SU_2 \times SU_2 \to SU_2$, $$D(P) \times D(Q) = \sum_{i=0}^{\min(PQ)} D(P+Q-2i);$$

31) $SU_2 \times SU_2 \times SU_2 \to SU_2$,
$$D(P; Q; R) = \sum_{i=0}^{\min(PQ)} \sum_{k=0}^{\min(P+Q-2i,\, R)} D(P+Q+R-2i-2k);$$

32) $SU_3 \times SU_3 \to SU_3$, $$D(P_1Q_1) \times D(P_2Q_2) =$$
$$= \sum_{i=0}^{\min(P_1,\, P_2)} \sum_{r=0}^{\min(P_1-i,\, Q_2)} \sum_{s=0}^{\min(P_2-i,\, Q_1)} D(P_1+P_2-2i-r-s,$$
$$Q_1+Q_2+i-r-s) + \sum_{k=1}^{\min(Q_1Q_2)} \sum_{r=0}^{\min(P_1,\, Q_2-k)} \sum_{s=0}^{\min(P_2,\, Q_1-k)} D(P_1+P_2+$$
$$+k-s-r, Q_1+Q_2-2k-r-s);$$

33) $O_5 \times O_5 \to O_5$,
$$D(P_1'0) \times D(P_1''0) = \sum_{k=0}^{\min(P_1',\, P_1'')} \sum_{\alpha=0}^{k} D(P_1'+P_1''-2k, k-\alpha);$$

$$D(0P_2') \times D(0P_2'') = \sum_{k=0}^{\min(P_2',\, P_2'')} \sum_{\alpha=0}^{k} D(2(k-\alpha), P_2'+P_2''-2k),$$

$$D(P_1'0)\times D(0P_2'')=\sum_{k=0}^{\min(P_1',P_2'')}\ \sum_{\alpha=0}^{\min\left\{\left[\frac{P_1'-k}{2}\right],\,Q-K\right\}} D(P_1'-$$

$$-2\alpha,\ P_2''-k);$$

34) $SU_n\times SU_n\to SU_n$,

$$D(P_10\ldots)\times D(P_20\ldots)=\sum_{l=0}^{\min(P_1,P_2)} D(P_1+P_2-2l,\ l,\ 0\ldots).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Шелепин.* ЖЭТФ, **46**, 1033 (1964).
2. *Л. А. Шелепин.* ЖЭТФ, 48, 360 (1965).
3. *Л. А. Шелепин.* Литовский физ. сборник, 5, 23 (1965).
4. *Л. А. Шелепин.* Труды комиссии по спектроскопии АН СССР, т. 2, вып. 2. М., «Наука», 1964, стр. 113.
5. *Л. А. Шелепин, В. П. Карасев.* Ядерная физика 5, 221 (1967).
6. *Л. А. Шелепин.* ЖЭТФ, 50, 1666 (1966).
7. *Л. А. Шелепин.* Ядерная физика, 4, 1091 (1966).
8. *L. A. Shelepin.* Nucl. Phys., **33**, 580 (1962).
9. *L. A. Shelepin.* Nucl. Phys., **B2**, 608 (1967).
10. *В. П. Карасев, Л. А. Шелепин.* Ядерная физика **7**, 1131 (1968).
11. *В. П. Карасев, Л. А. Шелепин.* Ядерная физика 8, 615 (1968).
12. *О. Г. Лисин, Л. А. Шелепин.* Графические методы, использующие симметрию Редже. Препринт ФИАН, № 125, 1967.
13. *Л. А. Шелепин.* Препринт ФИАН, № 4, 1967.
14. *Л. А. Шелепин.* Ядерная физика, 8. 827 (1968).
15. *Л. А. Шелепин.* ЖЭТФ, 54, 1463 (1968).
16. *И. М. Лизин, Л. А. Шелепин.* Ядерная физика, **9**, 440 (1969).
17. *L. A. Shelepin.* Preprint, № 96, PN Lebedev Physical Institute, 1969.
18. *Л. А. Шелепин.* Ядерная физика, **11**, 912 (1970).
19. *В. П. Карасев, Л. А. Шелепин.* Препринт ФИАН, № 33, 1969.
20. *В. П. Карасев, Л. А. Шелепин.* Препринт ФИАН, № 141, 1967.
21. *В. П. Карасев.* Наст. сборник, стр. 147.
22. *Т. М. Махвиладзе, Л. А. Шелепин.* Наст. сборник, стр. 120.
23. *H. Weyl.* Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1928.
24. *Г. Вейль, Ф. Петер.* УМН, **2**, 144 (1936); *Г. Вейль.* УМН, 4, 201 (1938).
25. *Э. Картан.* Теория спиноров. М., ИЛ, 1947.
26. *Б. Л. Ван-дер-Верден.* Метод теории групп в квантовой механике. Харьков. Госнаучтехиздат Украины, 1938.
27. *Е. Вигнер.* Теория групп. М., ИЛ, 1961.
28. *Е. Кондон, Г. Шортли.* Теория атомных спектров. М., ИЛ, 1949.
29. *G. Racah.* Phys. Rev., **62**, 438 (1942); **63**, 367 (1943); **76**, 1352 (1949).
30. *И. И. Собельман.* Введение в теорию атомных спектров. М., Физматгиз, 1963.
31. *Г. Я. Любарский.* Теория групп и ее применение в физике. М., Гостехиздат, 1957.
32. *М. Хамермеш.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М., «Мир», 1966.
33. *U. Fano, G. Racah.* Irreducible Tensorial Sets. N. Y., Acad. Press, 1959.
34. *А. П. Юцис, И. Б. Левинсон, В. В. Ванагас.* Математический аппарат теории момента количества движений. Вильнюс, ГИПНЛ ЛитССР, 1960.
35. *A. R. Edmonds.* Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, 1957; *А. Эдмондс.* В сб.: Деформация атомных ядер. М., ИЛ, 1958, стр. 305.
36. *G. Racah.* Group Theory and Spectroscopy. Princeton, 1951.
37. *T. Regge.* Nuovo cimento, **10**, 544 (1958).
38. *T. Regge.* Nuovo cimento, **11**, 116 (1959).
39. *H. A. Jahn, K. M. Howell.* Proc. Cambridge Philos. Soc., **55**, 338 (1959).
40. *T. Shimpuki.* Nouvo cimento, **27**, 874 (1963).
41. *А. П. Юцис, А. А. Бандзайтис.* Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс, «Минтис», 1965.
42. *V. Bargmann.* Rev. Mod. Phys., 34, 829 (1962).
43. *A. M. Bincer.* J. Math. Phys., **11**, 1835 (1970).
44. *G. Ponzano, T. Regge.* Spectroscopic and Group-theoretical Methods in Physics.— Racah Memorial Volume. Amsterdam, North Holland Publ. Co, 1968, p. 1.

45. *A. Giovannini, D. A. Smith.* Spectroscopic and Group-theoretical Methods in Physics.— Racah Memorial Volume, Amsterdam, North Holland Publ. Co, 1968, p. 89.
46. *S. M. R. Ansary.* J. Math. Phys., 9, 1295, 1299 (1968).
47. *S. M. R. Ansary.* Fortschr. Phys., 15, 707, 729 (1967).
48. *S. M. R. Ansary.* Nuovo cimento, 38, 1883 (1965).
49. *Н. Джекобсон.* Алгебры Ли. М., «Мир», 1964.
50. *Е. Б. Дынкин.* УМН, 2, 59 (1947); Матем. сборник, 30, 349 (1952)
51. *Г. Вейль.* Классические группы, их инварианты и представления. М., ИЛ, 1961.
52. *R. B. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal, W. Lee.* Rev. Mod. Phys., 34, 1 (1962).
53. *Дж. де Сварт.* УФН, 84, 651 (1964).
54. *L. C. Biedenharn.* J. Math. Phys., 4, 436 (1963).
55. *G. E. Baird, L. C. Biedenharn.* J. Math. Phys., 4, 1449 (1963); 5, 1723, 1730 (1964).
56. *M. Moshinsky.* Rev. Mod. Phys., 34, 813 (1962).
57. *N. Mukunda, L. K. Pandit.* J. Math. Phys., 6, 746 (1965).
58. *G. Ponzano.* Nuovo cimento, 41, 142 (1966).
59. *R. T. Sharp, H. von Baeyer.* J. Math. Phys., 7, 1105 (1966).
60. *S. J. Mc. Namee, F. Chilton.* Tables of Glebsch — Gordan Coefficients of SU_3. Stanford Univ'. ITP-126, 1964.
61. *C. L. Cook, G. Murtaza.* Nuovo cimento, 39, 531 (1965).
62. *C.— K. Chew, H. C. von Baeyer.* Nuovo cimento, A56, 53 (1968).
63. *K. Tokuichi.* Progr. Theoret. Phys., 39, 851 (1968).
64. *A. Di Leva, G. Ponzano.* Nuovo cimento, A51, 1107 (1967).
65. *C.— K. Chew, R. T. Sharp.* Nucl. Phys., B2, 697 (1967).
66. *А. П. Юцис, С. И. Алишаускас.* Докл. АН СССР, 177, 61 (1967).
67. *R. T. Sharp, S. C. Pierer.* J. Math. Phys., 9, 663 (1968).
68. *R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov.* Nucl. Phys., B4, 399 (1968).
69. *R. T. Sharp, H. C. von Bayer.* Nucl. Phys., A127, 513 (1969).
70. *D. F. Holland.* J. Math. Phys., 10, 531 (1969).
71. *M. Gell-Mann.* Report CTSL-20, California Inst. Technol., 1961. (Русск. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». М., «Мир», 1964, стр. 117).
72. *J. Ne'eman.* Nucl. Phys., 26, 222 (1961); (Русск. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». М., «Мир», 1964, стр. 176).
73. *У. Фаулер, Н. Сеймиос.* УФН, 85, 523 (1965).
74. *Я. А. Смородинский.* УФН, 84, 3 (1964).
75. *В. Б. Берестецкий.* УФН, 85, 393 (1965).
76. *Я. Б. Зельдович.* УФН, 86, 303 (1965).
77. *Е. Левин, Л. Франкфурт.* УФН, 94, 243 (1968).
78. *F. Gürsey, L. Radicatti.* Phys. Rev. Letters, 13, 173 (1964).
79. *M. Gell-Mann.* Phys. Rev. Letters, 14, 77 (1955).
80. *H. I. Lipkin, S. Meshkov.* Phys. Rev. Letters, 14, 80 (1965).
81. *M. A. B. Beg, A. Pais, B. W. Lee.* Phys. Rev. Letters, 14, 508 (1964).
82. *В. Вейскопф.* УФН, 96, 673 (1968).
83. *M. Gell-Mann.* Phys. Letters, 8, 214 (1964).
84. *G. Zweig.* CERN, Preprint, 8419/TH412, 1964.
85. *В. С. Попов.* В сб. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев, «Наукова думка», 1966, стр. 702.
86. *И. А. Малкин, В. И. Манько.* Ядерная физика, 3, 372 (1966).
87. *А. Пайс.* В сб. Теория групп и элементарные частицы. М., «Мир», 1967, стр. 220.
88. *К. Фронсдел.* В сб. Теория групп и элементарные частицы. М.,«Мир», 1967, стр. 324.
89. Non-Compact Groups in Particle Physics. Y. Chew (Ed.). N. Y., 1966.
90. *C. K. Wulfman, M. Takahata.* J. Chem. Phys., 47, 488 (1967).
91. *С. П. Аллилуев, А. В. Матвеенко.* В сб.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 695.
92. *J. I. Shibuya, C. E. Wulfman.* Amer. J. Phys., 33, 570 (1965); Proc. Roy. Soc., A296, 376 (1965).
93. *A. Dulock, H. V. McIntosh.* Amer. J. Phys., 33, 109 (1965).
94. *C. Wulfman.* Phys. Letters, 26A, 397 (1968).
95. *Г. Дарбу.* Принципы аналитической геометрии. М., ГОНТИ, 1938.
96. *В. А. Фок.* ЖЭТФ, 10, 383 (1940).
97. *А. О. Гельфонд.* Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1967.
98. *C. Jordan.* Calcules of Finite Differences. N. Y., Chelsea Publ. Co, 1950.
99. *И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
100. *Дж. Риордан.* Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.
101. *Г. Дж. Райзер.* Комбинаторная математика. М., «Мир», 1965.
102. *М. Холл.* Комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.
103. *Н. Н. Воробьев.* Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1969.
104. *В. В. Ванагас, И. В. Батарунас.* Литовский физ. сборник, 2, 75 (1962).
105. *О. Г. Лисин.* Дипломная работа. М., ФИАН, 1965.
106. Гравитация и топология. Сб. статей. М., «Мир», 1966.

107. *Дж. Вебер*. Общая теория относительности и гравитационные волны. М., ИЛ, 1963.
108. *Дж. А. Уилер*. Гравитация, нейтрино, вселенная. М., ИЛ, 1962.
109. *L. Van Hove*. Phys. Rev., 89, 1189 (1953).
110. *J. C. Phillips*. Phys. Rev., 104, 1263 (1956).
111. *H.— H. Schmidtke*. Internat. J. Quant. Chem., 2, 101 (1958).
112. *S. F. Edwards*. Proc. Phys. Soc., 91, 512 (1967).
113. *В. П. Сигорский*. Матрицы и графы в электронике. М., «Энергия», 1968.
114. *Р. Хуа, В. Теплиц*. Гомология и фейнмановские интегралы. М., «Мир», 1969.
115. *D. Fotiadi, M. Fraissart, J. Lascoux, F. Pham*. Topology, 4, 159 (1965).
116. *P. Federbuch*. J. Math. Phys., 6, 941 (1965).
117. *Л. С. Понтрягин*. Основы комбинаторной топологии. М., Гостехиздат, 1947.
118. *П. С. Александров*. Комбинаторная топология. М., Гостехиздат, 1947.
119. *П. Хилтон, С. Уайли*. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. М., «Мир», 1966.
120. *Н. Стинрод, С. Эйленберг*. Основания алгебраической топологии. М., Физматгиз, 1958.
121. *П. Д. Румшас, В. А. Матулис, А. П. Юцис*. Литовский физ. сборник, 4, 447 (1964); *П. Д. Румшас, А. П. Юцис*. Литовский физ. сборник, 5, 185 (1965).
122. *Ф. Фам*. Введение в топологическое исследование особенности Ландау. М., «Мир», 1970.
123. *J. L. Birman*. Phys. Rev., **127**, 1093 (1962).
124. *К. Шевалле*. Теория групп Ли, т. 1. М., ИЛ, 1946; т. 2, 3. М., ИЛ, 1958.
125. Семинар «Софус Ли». Теория алгебр Ли, топология групп Ли. М., ИЛ, 1962.
126. *Л. П. Эйзенхарт*. Непрерывные группы преобразований. М., ИЛ, 1947.
127. *E. Cartan*. Bull. Soc. Math. France, 41, 53 (1913).
128. *Н. А. Глаголев*. Проективная геометрия. М., «Высшая школа», 1963.
129. *H. Freudental*. Indag. Math., 15, 90 (1953).
130. *D. E. Littlewood*. Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups. N. Y., Oxford Univ. Press., 1958.
131. *E. M. Ibrahim*. Amer. Math. Soc. Proc., 7, 199 (1956).
132. *P. R. Smith, B. G. Wybourne*. J. Math. Phys., 8, 2434 (1967); 9, 1040 (1968).
133. *B. Gruber*. J. Math. Phys., 11, 3077 (1970).
134. *G. C. Hegerfeldt*. J. Math. Phys., 8, 1195 (1967).
135. *M. Brunet, M. Resnikoff*. J. Math. Phys., 11, 1471 (1970).
136. *Д. И. Желобенко*. Компактные группы Ли и их представления. М., «Наука», 1970.
137. *P. C'hand, C. L. Mento, N. Mukunda, E. C. G. Sudarshan*. J. Math. Phys., 8, 2048 (1967).
138. *B. Gruber, H. I. Weber*. Proc. Roy. Irish Acad., **A66**, 31 (1968).
139. *В. С. Попов, А. М. Переломов*. Ядерная физика, 7, 460 (1968).
140. *H. T. Wadzinski*. Nuovo cimento, **B62**, 247 (1969).
141. *N. Kemmer, D. L. Pursey, S. A. Williams*. J. Math. Phys., 9, 1224 (1968).
142. *T. J. Nelson*. Amer. J. Phys., **36**, 791 (1968).
143. *И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин*. Докл. АН СССР, 71, 825, 1017 (1950).
144. *Л. А. Шелепин*. ЖЭТФ, 37, 1626 (1959).
145. *Л. А. Шелепин*. Труды ФИАН, 30, 253 (1964).
146. *Б. Ф. Бейман*. Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии. М., Физматгиз, 1961.
147. Higher Transcendental Functions, t. 1, 2, 3. N. Y., Toronto, London, McGraw Hill, 1953, 1955; *Г. Бейтман, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции, т. 1—3. Справочная математическая библиотека. М., «Наука», 1965.
148. *Г. Сеге*. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
149. *Ж. Кампе де Ферье, Р. Кембелл, Г. Петьо, Т. Фогель*. Функции математической физики. М., Физматгиз, 1963.
150. *Н. Я. Виленкин*. Специальные функции и теория представлений групп. М., Физматгиз, 1965.
151. *М. Роуз*. Поле мультиполей. М., ИЛ, 1957.
152. *B. M. Minton*. J. Math. Phys., 11, 3061 (1970).
153. *И. М. Лизин, Л. А. Шелепин*. Наст. сборник, стр. 221.
154. *Ф. И. Федоров*. Докл. АН БССР, 2, 408 (1958); 5, 101, 194 (1961); 193, 56 (1962).
155. *Е. Е. Тхарев, Ф. И. Федоров*. Ядерная физика, 5, 1112 (1967).
156. *E. M. Corson*. Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equation London and Glasgow, Blockie and Son Ltd, 1954.
157. *А. А. Богуш, В. Г. Мороз*. Введение в теорию классических полей. Минск' изд-во «Наука и техника», 1968.
158. *Ю. М. Широков*. ЖЭТФ, 33, 801 (1957); 33, 1208 (1958).
159. *Harish-Chandra*. Proc. Roy. Soc., 192, 195 (1948).
160. *М. А. Наймарк*. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
161. *Л. А. Шелепин*. ЖЭТФ, 34, 1574 (1958).
162. *Л. А. Шелепин*. ЖЭТФ, 40, 1369 (1961).

163. *И. М. Гельфанд, А. М. Яглом*, ЖЭТФ, 18, 73 (1948).
164. *Ф. И. Федоров*. ЖЭТФ, 35, 493 (1958).
165. *В. Я. Файнберг*. Труды ФИАН, 6, 269 (1955).
166. *В. К. Гронский*. Диссертация. Минск, МГПИ им. А. М. Горького, 1965.
167. *М. С. Маринов*. Препринт. ИТЭФ, № 538, 1967.
168. *V. Bargmann, E. P. Wigner*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, 211 (1948).
169. *D. L. Weaver, C. L. Hammer, R. H. Good*, Jr. Phys. Rev., B135, 241 (1964).
170. *S. Weinberg*. Phys. Rev., B133, 1318 (1964).
171. *A. Sankaranarayanan*. Nuovo cimento, A41, 532 (1966).
172. *Нгуен Ван Хьеу*. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. М., Атомиздат, 1967.
173. *Н. Н. Ачасов, Р. М. Мурадян*. В сб.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев, «Наукова думка», 1966, стр. 574.
174. *A. R. Edmonds, B. H. Flowers*. Proc. Roy. Soc., A214, 515, (1952); A215, 120 (1952).
175. *H. A. Jahn*. Phys. Rev.., 96, 979 (1954).
176. *A. S. Eddington*. Relativity Theory of Protons and Electrons. Cambridge Univ. Press, 1936; The Philosophy of Physical Science. Cambridge Univ. Press, 1939.
177. *Y. Nambu*. Progr. Theoret. Phys., Suppl., 37, 368 (1966).
178. *M. Bander, C. Itzykson*. Group Theory and the Hydrogen Atom I, II. Preprint SLAC-120, p. 141, 1965.
179. *B. R. Judd*. Operator Techniques in Atomic Spectroscopy. N. Y., McGraw — Hill Book Co. Inc., 1963.
180. *Р. Натаф*. Модели ядер и ядерная спектроскопия. М., «Мир», 1968.
181. *И. Г. Каплан*. Симметрия многоэлектронных систем. М. Физматгиз, 1969.
182. *J. P. Elliott*. Proc. Roy. Soc., A245, 128 (1958).
183. *A. K. Kerman*. Ann. Phys., 12, 300 (1961).
184. *S. Feneuilie*. J. Phys., 28, 61, 315 (1967).
185. *A. K. Kerman, R. D. Lawson, M. H. Macfarlane*. Phys. Rev., 124, 162 (1961).
186. *R. D. Lawson, M. H. Macfarlane*. Nucl. Phys., 66, 80 (1965).
187. *H. Watanabe*. Progr. Theoret. Phys., 32, 106 (1964).
188. *B. R. Judd*. Physica, 33, 174 (1967).
189. *J. C. Morrison*. J. Math. Phys., 10, 1431 (1969).
190. *Ю. А. Симонов*. Ядерная физика, 3, 630 (1966).
191. *В. В. Пустовалов, Ю. А. Симонов*. ЖЭТФ, 51, 345 (1966).
192. *В. В. Пустовалов, Я. А. Смородинский*. Ядерная физика, 10, 1287 (1969).
193. *Ю. Нири, Я. А. Смородинский*. Ядерная физика, 9, 882 (1969).
194. *B. R. Judd*. Phys. Rev., 141, 4 (1966); Comments Atom and Mol. Phys., 1, 57 (1969).
195. *J. S. Alper, O. Sinanoglu*. Phys. Rev., 177, 77 (1969); *J. S. Alper*. Phys. Rev., 177, 86 (1969).
196. *N. Cabibbo*. Phys. Rev. Letters, 12, 62 (1964).
197. *B. R. Judd*. Comments Atom and Mol. Phys., 1, 12 (1969).
198. *H. Gato, T. Yabuki*. Progr. Theoret. Phys., 37, 1319 (1967).
199. *М. А. Ельяшевич*. Атомная и молекулярная спектроскопия. М., Физматгиз, 1962.
200. *М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов*. Колебания молекул, т. 1. М., Гостехиздат, 1949.
201. *C. Herring*. Rev. Mod. Phys., 34, 691 (1962).
202. *И. В. Комаров, С. Ю. Славянов*. ЖЭТФ, 52, 1368 (1967).
203. *Ю. Н. Демков, И. В. Комаров*, ЖЭТФ, 56, 286 (1966).
204. *V. Fok*. Z. Phys., 98, 145 (1935).
205. *R. M. Dicke*. Phys. Rev., 93, 99 (1954).
206. *А. Н. Ораевский*. УФН, 91, 3 (1967).
207. *В. М. Файн*. УФН, 64, 273 (1958); 79, 641 (1963).
208. *В. М. Файн, Я. И. Ханин*. Квантовая радиофизика. М, «Советское радио», 1965.
209. *Л. И. Гудзенко, Л. А. Шелепин*. Докл. АН СССР, 166, 1296 (1965).
210. *Б. Ф. Гордиец, Л. И. Гудзенко, Л. А. Шелепин*. JQSRT, 8, 791 (1968).
211. *Б. Ф. Гордиец, Н. Н. Соболев, Л. А. Шелепин*. ЖЭТФ, 53, 1822 (1967).
212. *Б. Ф. Гордиец, Л. И. Гудзенко, Л. А. Шелепин*, ЖЭТФ, 55, 942 (1968).
213. *А. С. Бирюков, Б. Ф. Гордиец, Л. А. Шелепин*. ЖЭТФ, 57, 585 (1969).
214. *В. С. Рязанов, М. М. Сущинский*. ЖЭТФ, 51, 4 (1967).
215. *Р. Глаубер*. В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М., «Мир», 1966, стр. 91.

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

1973 ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА Том 70

Т. М. МАХВИЛАДЗЕ, Л. А. ШЕЛЕПИН

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ КОГЕРЕНТНЫХ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ (СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, МОДУЛИРОВАННЫЕ ПУЧКИ)

1. Введение

В настоящей статье проводится исследование коллективных свойств многочастичных систем в двух частных задачах: когерентное спонтанное излучение многоуровневых молекул и кооперативные свойства пучков частиц. Использование теоретико-группового подхода позволяет установить тесную взаимосвязь в описании когерентных свойств различных физических объектов, в результате чего появляются новые возможности в теории когерентных состояний.

Спонтанное излучение отдельных атомов или молекул в случае, когда линейные размеры системы малы по сравнению с длиной волны, происходит не независимо. Всегда имеется косвенное взаимодействие между частицами через электромагнитное поле излучения, которое может приводить как к усилению излучения (сверхизлучающие состояния), так и к его подавлению [1, 2]. В последнее время интерес к явлениям, связанным с когерентностью молекул при излучении, сильно возрос благодаря экспериментальному наблюдению ряда эффектов, возникающих при воздействии короткого электромагнитного импульса на резонансную среду («фотонное эхо» [3], эффекты «самопропускания» импульса [4, 5], изменения спектра импульса [6, 7]).

Основы квантовой теории когерентного спонтанного излучения были заложены Дике [1], который показал, что в результате взаимодействия через поле двухуровневые молекулы ведут себя, как единая квантовомеханическая система, интенсивность излучения которой определяется ее когерентными характеристиками. Позднее задача Дике в разных ее аспектах изучалась многими авторами [2,8—11]; при этом, однако, рассмотрение не выходило за рамки двухуровневой идеализации. Между тем в ряде задач (молекулы с эквидистантным спектром, взаимодействие с интенсивными потоками излучения, действие нескольких резонансных импульсов) такая идеализация неприменима. Кроме того, само спонтанное излучение многоуровневых молекул, как будет видно ниже, обнаруживает ряд особенностей, которые трудно предвидеть, располагая только результатами, относящимися к двухуровневым молекулам. Наконец, рассмотрение многоуровневой задачи позволяет точно установить границы использования двухуровневого приближения.

Возможность обобщения теории Дике на многоуровневые молекулы рассматривалась в [12], где отмечалось, что существенным моментом в теории Дике является выбор в качестве стационарных состояний невозмущенного гамильтониана неприводимых представлений группы SU_2

в энергетическом пространстве системы. В [1] по существу показана естественность выбора этого набора состояний при рассмотрении когерентного излучения; использование любого другого набора дает в лучшем случае неудобный метод рассмотрения подобных задач. Аналогичную роль для многоуровневых систем играет базис неприводимых представлений группы SU_n (n — число уровней). В [13] групповыми методами был получен явный вид матрицы плотности многоуровневой системы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

Разд. 2—7 настоящей работы посвящены изучению когерентного излучения в многоуровневых системах на основе теоретико-группового подхода. Детально исследован случай $n = 3$ (дана полная классификация когерентных состояний, найдены когерентные характеристики, проанализированы свойства спонтанного излучения). Из проведенного рассмотрения вытекают экспериментальные возможности получения сверхизлучения на нескольких частотах импульсным воздействием на систему, а также наблюдения «фотонного эха» в многоуровневой схеме (в этом случае угловые распределения сверхизлучающих откликов носят, как показано ниже, весьма специфичный характер). С методической точки зрения представляло интерес построение когерентных состояний для группы SU_3 и получение квазиклассических уравнений движения для макроскопических поляризаций. Их решение в приближении, использованном в разд. 6, совпадает с квантовым. В том же приближении найдена статистика полей излучений из сверхизлучающих состояний. В разд. 6 рассмотрена также возможность обобщения когерентных состояний на системы с неэквидистантным спектром на примере вращающихся тел. Для таких состояний, трактуемых как максимально близкие к классическим, в отличие от осцилляторов нет полного классического образа; сохраняется, однако, ряд основных свойств классического описания.

Необходимо подчеркнуть, что переход от двухуровневой схемы к трехуровневой является принципиальным шагом, позволяющим изучать ряд тонких эффектов в нелинейных процессах взаимодействия света с веществом. Анализ, проведенный в данной работе, показывает, что уже в трехуровневой схеме выявлены основные черты явлений, происходящих в реальных многоуровневых системах.

В разд. 8 приведено описание когерентных свойств частиц в пучковых экспериментах. Показано, что наличие корреляций между частицами падающего пучка может приводить к значительному увеличению вероятности процесса его взаимодействия с рассеивателем. Дана принципиальная схема экспериментов, в которых указанный эффект реализуется в результате модуляции пучка.

2. Трехуровневые системы. Групповой формализм

Будем рассматривать систему излучателей с тремя невырожденными уровнями энергии, вообще говоря, неэквидистантными [14]. Ансамбль частиц занимает объем с линейными размерами, малыми по сравнению с длинами волн, излучаемых системой. Будем пренебрегать неупругими столкновениями (газ низкой плотности). Тогда переменные внутренней энергии молекул и координаты их центров масс разделяются.

Гамильтониан системы удобно записать с помощью генераторов группы SU_3 (необходимые сведения из теории представлений группы SU_3 приведены в прил. I см., например, [15—17]; там же введены используемые в основном тексте обозначения). Оператор внутренней энергии j-й молекулы имеет собственные значения $\varepsilon_1 = -\varepsilon/2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$, ε_3 и представим в виде

$$H_1^{(j)} = \varepsilon I_3^{(j)} + \varepsilon_3 \left(\frac{1}{3} - Y\right)^{(j)}. \tag{1}$$

Собственные функции этого оператора $\chi_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$, (см. прил. I, формулу (П. 4)) отвечают собственным значениям

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(0, -\frac{2}{3}\right)$$

операторов $I_3^{(j)}$, $Y^{(j)}$ и соответствуют нахождению молекулы на первом, втором и третьем уровнях. Функции $\chi_i^{(j)}$ преобразуются по представлению D (1 0) группы SU_3, т. е. каждая молекула характеризуется унитарным спином в своем энергетическом пространстве.

Невозмущенный гамильтониан системы N молекул

$$H = H_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) + \varepsilon I_3 + \varepsilon \left(\frac{1}{3} - Y\right), \tag{2}$$

где H_0 — энергия поступательного движения и межмолекулярного взаимодействия молекул, $I_3 = \sum_{j=1}^{N} I_3^{(j)}$, $\frac{1}{3} - Y = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{3} - Y\right)^{(j)}$. H_0 действует только на координаты центров масс молекул $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$. Операторы H_0 и $H_1 = \sum_{j=1}^{N} H_1^{(j)}$ коммутируют.

Собственные функции невозмущенного гамильтониана имеют вид

$$\psi_{g, N_1, N_2, N_3} = U_g(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)\, \chi_{p_1}^{(1)} \chi_{p_2}^{(2)} \ldots \chi_{p_N}^{(N)}. \tag{3}$$

Здесь $U_g(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ — координатная часть волновой функции: функции $\chi^{(j)}$ показывают, на каком уровне находится каждая из молекул. Произведение $\chi_{p_1}^{(1)} \chi_{p_2}^{(2)} \ldots \chi_{p_N}^{(N)}$ представляет собой тензор $T^{p_1 p_2 \ldots p_N}$ N-го ранга на пространстве размерности 3^N, преобразующийся по представлению $[D(1\,0)]^N$. Общее число базисных векторов в этом пространстве равно 3^N. Число базисных векторов при заданных заселенностях — кратность вырождения гамильтониана H_1 — равно $N!\ [N_1! N_2! N_3!]^{-1}$. $T^{p_1 \ldots p_N}$ — собственные функции I_3 и Y:

$$I_3 T^{p_1 \ldots p_N} = {}^1/_2 (N_2 - N_1)\, T^{p_1 \ldots p_N},$$

$$Y T^{p_1 \ldots p_N} = {}^1/_3 (N_1 + N_2 - 2N_3)\, T^{p_1 \ldots p_N}.$$

Полная энергия системы равна ($H_0 U_g = E_g U_g$)

$$E = E_g + {}^1/_2 \varepsilon I_3 + \varepsilon_3 ({}^1/_3 N - Y).$$

Взаимодействие молекул с классическим полем излучения в дипольном приближении описывается оператором

$$H_{int} = -\mathbf{A}\,[(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) I_+ + (\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4) K_- + (\mathbf{e}_5 + i\mathbf{e}_6) L_- + \text{э.с.}], \tag{4}$$

где $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал поля в месте нахождения системы; векторы $\mathbf{e}_i$ связаны с матричными элементами дипольного момента соотношениями:

$$\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2 = -\frac{i\varepsilon}{\hbar c}\mathbf{d}_{12}, \quad \mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4 = \frac{i}{\hbar c}\left(\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mathbf{d}_{32}, \quad \mathbf{e}_5 - i\mathbf{e}_6 = \frac{i}{\hbar c}\left(\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\mathbf{d}_{31}.$$

Таким образом, вероятности переходов определяются матричными элементами операторов $I_\pm$, $K_\pm$, $L_\pm$. Диаграмма переходов под действием этих операторов изображена на рис. 1. Эти операторы имеют следующие правила отбора по диагональным квантовым числам:

$$\begin{array}{llll} I_\pm: & \Delta I_3 = \pm 1, & \Delta Y = 0, & \Delta g = 0; \\ K_\pm: & \Delta I_3 = \pm {}^1/_2, & \Delta Y = \pm 1, & \Delta g = 0; \\ L_\pm: & \Delta I_3 = \mp {}^1/_2, & \Delta Y = \pm 1, & \Delta g = 0. \end{array} \tag{5}$$

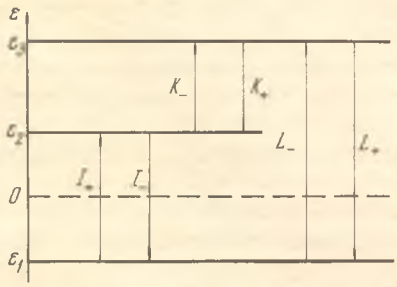


Рис. 1. Диаграмма переходов между энергетическими уровнями

Переход между каждой парой уровней описывается недиагональными компонентами I, K или L-спина

H_{int} имеет неисчезающие матричные элементы между состояниями (3) и большим числом других состояний, для которых выполнены условия (5). Поэтому, используя состояния (3), крайне затруднительно провести классификацию всех возможностей при когерентном излучении. В качестве исходных состояний надо использовать такие, чтобы H_{int} связывал одно стационарное состояние с возможно меньшим числом других состояний. Таким набором состояний является базис неприводимых представлений группы SU_3. Ситуация здесь аналогична двухуровневому случаю [1], когда желаемый базис образуют неприводимые представления группы SU_2, поскольку оператор I^2, собственными значениями которого классифицируется этот базис, коммутирует с полным гамильтонианом. В случае трехуровневых молекул электромагнитные переходы сохраняют квантовые числа P и Q, которыми индицируются неприводимые представления $D(PQ)$ группы SU_3 (гамильтониан построен из генераторов SU_3, с которыми коммутируют операторы Казимира (см. прил. I). Новый набор состояний будем обозначать $|P, Q, I, I_3, Y>$ или $|s, a, I, I_3, Y>$, где $s = {}^1/_3\,(N - P + Q)$, $a = {}^1/_3\,(N - P - 2Q)$.

Получим формулу перехода от состояний (3) к новому набору. Для этого следует разложить тензор $T^{p_1 \cdots p_N}$, преобразующийся по представлению $[D(1, 0)]^N$, на неприводимые части. Используя операции приведения (прил. I), получаем

$$[D(10)]^N = \sum_{s=0}^{[N/2]} \sum_{a=0}^{\min(N-2s,\, s)} \beta_{a,s} D(N - 2s - a,\, s - a), \tag{6}$$

где числа

$$\beta_{a,s} = \frac{N!\,(s - a + 1)(N - s - 2a + 2)(N - 2s - a + 1)}{a!\,(s + 1)!\,(N - s - a + 2)!} \tag{7}$$

определяют кратность вырождения состояний с данными s, a, N_1, N_2, N_3 (при переходе к новому базису вырождение частично снимается). Величина

$$\alpha_{a,s} = {}^1/_2(N - 2s - a + 1)(s - a + 1)(N - s - 2a + 2)$$

определяет число собственных функций гамильтониана с разными значениями заселенностей (сумма $N_1 + N_2 + N_3$ фиксирована и равна N), преобразующихся по представлению $D\,(N - 2s - a,\, s - a)$. Общее число собственных функций невозмущенного гамильтониана равно $\sum_{s,a} \alpha_{a,s}$. Так, при $N = 3$ $\alpha_{0,0} = 10$, $\alpha_{1,0} = 8$, $\alpha_{1,1} = 1$ и общее число собственных функций равно 19. Явный вид функций $|s, a, I, N_1, N_2>$ для случаев $N = 2, 3$ приведен в прил. II. Функции, преобразующиеся по неприводимым представлениям SU_3, симметризованы согласно определенным схемам Юнга. Для случая $N = 3$ типы симметрии этих функций указаны в прил. II.

Легко получить, что при заданных значениях P и Q числа I и Y могут принимать значения, заполняющие таблицу (прил. III) с длиной строки

$P/2$ и длиной столбца $Q/2$ (ср. с диаграммой изомультиплетов в [15—17]). В каждой клетке таблицы указаны значения I и Y ($Y_0 = (P - Q)/3$). Если заданы значения заселенностей, то возможные значения I и Y заполняют ту часть таблицы, которая находится между диагоналями, соответствующими значениям $I_{\min} = {}^1/_2\,|N_2 - N_1|$ и $I_{\max} = {}^1/_2\,(N_1 + N_2)$. Если при этом задано N_3, то возможные значения I лежат на диагонали $Y = {}^1/_3\,(N_1 + N_2 - 2N_3)$.

Весьма важно получить ответ на вопрос, какие значения P и Q возможны при заданных заселенностях и I. Для этого вместо канонического базиса $|P, Q, I, I_3, Y\rangle$ воспользуемся симметрическим базисом $\left|\begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix}\right\rangle$ (связь между ними приведена в [18]). Здесь $p_1 + p_2 + p_3 = P$, $q_1 + q_2 + q_3 = Q$ ($p_i, q_i \geqslant 0$). Индексы представлений симметрического базиса связаны с индексами старого базиса соотношениями:

$$I_3 = {}^1/_2\,[(q_2 - q_1) + (p_1 - p_2)], \qquad 3Y = (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) - 2(p_3 - q_3),$$
$$^1/_2\,|p_{12} - q_{12}| \leqslant I \leqslant \varkappa, \tag{8}$$

где $\varkappa = {}^1/_2\,(p_{12} + q_{12})$, $\quad p_{12} = p_1 + p_2$, $\quad q_{12} = q_1 + q_2$.

В симметрическом базисе легко задать любой из изоспинов (I, K или L). Заселенности уровней прямо связаны с индексами нового базиса. Поскольку $I_3 = {}^1/_2\,(N_2 - N_1)$, $Y = {}^1/_3\,(N_1 + N_2 - 2N_3)$, находим:

$$N_1 = p_2 - q_2 + s, \qquad N_2 = p_1 - q_1 + s, \qquad N_3 = p_3 - q_3 + s,$$
$$N - 2s - a = p_1 + p_2 + p_3, \qquad s - a = q_1 + q_2 + q_3. \tag{9}$$

Используя (9) и таблицу прил. III, получаем, что при заданных N_1, N_2, N_3, I числа s и a могут пробегать значения, удовлетворяющие системе неравенств:

$$I_M - I \leqslant s \leqslant I_M + I, \qquad a \leqslant I_M - I, \qquad s + a \leqslant I_M - I + N_3, \tag{10}$$

где $I_M = {}^1/_2\,(N_1 + N_2)$, $|I_3| \leqslant I \leqslant I_M$.

При заданных заселенностях разложение (6) содержит члены с теми s и a, которые удовлетворяют условиям (10). Недиагональные генераторы SU_3, действуя на данное неприводимое представление, имеют следующие правила отбора (помимо правил (5)):

$$\left.\begin{array}{ll} I_+,\ I_-: & \Delta I = 0 \\ K_+,\ K_-: & \Delta I = \pm {}^1/_2, \\ L_+,\ L_-; & \Delta I = \pm {}^1/_2, \end{array}\right\} \quad \Delta s = 0, \ \Delta a = 0. \tag{11}$$

Поэтому в базисе неприводимых представлений SU_3 оператор взаимодействия связывает начальное состояние всего с десятью другими, входящими в данное неприводимое представление.

Вычисление матричных элементов приводит к результату [19]

$$\begin{aligned} \langle I, I_3 - 1, Y\,|\,I_-\,|\,I, I_3, Y\rangle &= \sqrt{(I + I_3)(I - I_3 + 1)}, \\ \langle I + {}^1/_2, I_3 + {}^1/_2, Y + 1\,|\,K_+\,|\,I, I_3, Y\rangle &= \gamma_1 \sqrt{I + I_3 + 1}, \\ \langle I - {}^1/_2, I_3 + {}^1/_2, Y + 1\,|\,K_+\,|\,I, I_3, Y\rangle &= \gamma_2 \sqrt{I - I_3}, \\ \langle I + {}^1/_2, I_3 - {}^1/_2, Y + 1\,|\,L_+\,|\,I, I_3, Y\rangle &= \gamma_1 \sqrt{I - I_3 + 1}, \\ \langle I - {}^1/_2, I_3 - {}^1/_2, Y + 1\,|\,L_+\,|\,I, I_3, Y\rangle &= -\gamma_2 \sqrt{I + I_3}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\gamma_1^2 = \frac{(I_M + I - s + 1)(I_M + I - a + 2)(I_M - I - s - a + N_3)}{2(I + 1)(2I + 1)},$$

$$\gamma_2^2 = \frac{(I - I_M + s)(I_M - I - a + 1)(I_M + I - s - a + N_3 + 1)}{2I(2I + 1)},$$

Используя формулы (12), получаем:

$$\begin{aligned}
\langle I, I_3+1, Y \,|\, I_+ \,|\, I, I_3, Y\rangle &= \sqrt{(I-I_3)(I+I_3+1)},\\
\langle I-{}^1/_2, I_3-{}^1/_2, Y-1 \,|\, K_- \,|\, I, I_3, Y\rangle &= \gamma_3\sqrt{I+I_3},\\
\langle I+{}^1/_2, I_3-{}^1/_2, Y-1 \,|\, K_- \,|\, I, I_3, Y\rangle &= \gamma_4\sqrt{I-I_3+1},\\
\langle I-{}^1/_2, I_3+{}^1/_2, Y-1 \,|\, L_- \,|\, I, I_3, Y\rangle &= \gamma_3\sqrt{I-I_3},\\
\langle I+{}^1/_2, I_3+{}^1/_2, Y-1 \,|\, L_- \,|\, I, I_3, Y\rangle &= \gamma_4\sqrt{I+I_3+1},
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\gamma_3^2 = \frac{(I_M+I-s)(I_M+I-a+1)(I_M-I-s-a+N_3+1)}{2I(2I+1)},$$

$$\gamma_4^2 = \frac{(I-I_M+s+1)(I_M-I-a)(I_M+I-s-a+N_3+2)}{2(2I+1)(I+1)}.$$

3. Характеристики спонтанного излучения

С помощью матричных элементов (12), (13), полученных в предыдущем разделе, для интенсивностей спотанного излучения получаем

$$\begin{aligned}
J_{21} &= J_{21}^{(0)}(I+I_3)(I-I_3+1),\\
J_{32} &= J_{32}^{(0)}\,[\gamma_1^2(I+I_3+1)+\gamma_2^2(I-I_3)],\\
J_{31} &= J_{31}^{(0)}\,[\gamma_1^2(I-I_3+1)+\gamma_2^2(I+I_3)],
\end{aligned} \tag{14}$$

где $J_{21}^{(0)}, J_{31}^{(0)}, J_{32}^{(0)}$ — интенсивности спонтанного излучения изолированной молекулы (например, если $N_1 = N_2 = 0$, $N_3 = 1$, из системы неравенств (10) имеем $s = a = 0$ и из (14): $J_{31} = J_{31}^{(0)}$, $J_{32} = J_{32}^{(0)}$). В прил. II приведены интенсивности излучения для всех возможных состояний системы с $N = 2, 3$.

Таким образом, интенсивности зависят от трех квантовых чисел s, a, I, одно из которых (I) меняется при переходах $3 \to 1$ и $3 \to 2$. Эти числа — кооперационные характеристики системы молекулы, которые определяют скорость ее радиационного распада. Кооперативные состояния системы — суперпозиции произведений волновых функций отдельных излучателей, являющиеся неприводимыми представлениями SU_3 в энергетическом пространстве системы.

Рассмотрим сначала случаи, которые должны описываться схемой Дике [1].

1. Если $N_3 = 0$, то в силу (10) $a = 0$, $s = I_M - I$. Для интенсивностей получаем формулу Дике

$$J_{21} = J_{21}^{(0)}(I+I_3)(I-I_3+1),\ J_{32} = J_{31} = 0. \tag{15}$$

2. Если $N_1 = 0$, то $I = I_3 = N_2/2$, $a = 0$, $0 \leqslant s \leqslant \min(N_2, N_3)$, $J_{32} = J_{32}^{(0)}(K+K_3)(K-K_3+1)$, $J_{31} = J_{31}^{(0)}N_3$, $J_{21} = J_{21}^{(0)}N_2$, где формулой $K = (N_2+N_3)/2 - s$ введен K-спин:

$$|K_3| \leqslant K \leqslant \frac{N_2+N_3}{2}, \qquad K_3 = {}^1/_2(N_2-N_3).$$

3. Если $N_2 = 0$, то $I = -I_3 = N_1/2$, $a = 0$, $0 \leqslant s \leqslant \min(N_1, N_3)$, $J_{31} = J_{31}^{(0)}(L+L_3)(L-L_3+1)$, $J_{32} = J_{32}^{(0)}N_3$, $J_{21} = 0$, где формулой $L = (N_1+N_3)/2 - s$ введен L-спин:

$$|L_3| \leqslant L \leqslant \frac{N_1+N_3}{2}, \qquad L_3 = {}^1/_2(N_1-N_3).$$

В рассмотренных случаях, когда число частиц на одном из уровней равно нулю, корреляционная связь между двумя другими уровнями описы-

вается так же, как и в случае двухуровневой схемы, соответствующим изоспином (I, K или L). Излучение по другим каналам пропорционально числу частиц на уровне, переход с которого рассматривается. При $s = 0$ интенсивности излучения между уровнями, связанными соответствующим изоспином, пропорциональны N^2 (сверхизлучающие состояния Дике).

В целом при анализе формул (10), (14) встречаются самые разнообразные возможности. Рассмотрим наиболее интересные из них.

4. Пусть $I = I_{\max}$. Тогда $a = 0$, $s = \min(N_1 + N_2, N_3)$. Для интенсивностей получаем:

$$J_{21} = J_{21}^{(0)} N_2(N_1 + 1),$$

$$J_{32} = J_{32}^{(0)} \frac{N_3 - s}{N_1 + N_2 + 1}\left[(N_1 + 1)(N_1 + N_2 - s + 1) + \frac{N_1 s}{N_1 + N_2}\right],$$

$$J_{31} = J_{31}^{(0)} \frac{N_3 - s}{N_1 + N_2 + 1}\left[(N_1 + 1)(N_1 + N_2 - s + 1) + \frac{N_2 s}{N_1 + N_2}\right].$$

а) При $s = 0$:

$$J_{21} = J_{21}^{(0)} N_2(N_1 + 1),\ J_{32} = J_{32}^{(0)} N_3(N_2 + 1),\ J_{31} = J_{31}^{(0)} N_3(N_1 + 1).$$

В частности, при равных заселенностях интенсивности излучения по всем каналам пропорциональны квадрату полного числа молекул (сверхизлучение по всем частотам). Этому случаю соответствует полносимметричная волновая функция, преобразующаяся по представлению D (N 0).

б) При $s = N_3$ ($N_3 \leqslant N_1 + N_2$) излучение на частотах ω_{13}, ω_{32} подавлено; в то же время система излучает когерентно на частоте ω_{21}.

5. Пусть $I = 0$ ($N_1 = N_2$). Тогда $s = N_1$, $a \leqslant \min(N_1, N_3)$. Из (14) имеем

$$\frac{J_{21}}{J_{31}^{(0)}} = \frac{J_{32}}{J_{32}^{(0)}} = \frac{1}{2}(N_3 - a)(N_1 - a + 2), \quad J_{21} = 0.$$

а) При $a = 0$ излучение когерентно на частотах ω_{32}, ω_{31} и отсутствует на частоте ω_{12}.

б) При $a = N_3$ ($N_3 \leqslant N_1$) излучение отсутствует вообще. Это частный результат более общего случая 6.

6. Пусть $I = -I_3$ ($N_2 \leqslant N_1$). Тогда s и a заключены в пределах:

$$N_2 \leqslant s \leqslant N_1, \quad a \leqslant N_2,\ s + a \leqslant N_2 + N_3.$$

а) При $s = N_2$, $a = N_3$ ($N_3 \leqslant N_2$) система не излучает ни по одному из каналов. Этому случаю соответствует полностью антисимметричная волновая функция.

б) при $s = N_3$, $a = N_2$ ($N_2 \leqslant N_3 \leqslant N_1$) имеется только излучение на частоте $\omega_{32}: J_{32} = J_{32}^{(0)}(N_3 - N_2)$. При переходе $3 \to 2$, как это следует из (12), $I \to I - 1/2$, $I_3 \to I_3 + 1/2$ (так как $\gamma_1 = 0$). Поэтому распад системы идет до состояния с $I = I_3 = 0$, $N_1 = N_2 = N_3$, когда она не излучает вообще.

Если с помощью формул (8) ввести базис, в котором изоспин задан по первому и третьему или по второму и третьему уровням, то можно ввести состояния, в которых излучение когерентно или подавлено по любому из каналов или сразу по двум из них (имеются в виду возможности, которые не реализуются в базисе $|s, a, I, I_3, Y\rangle$); анализ практически важных случаев (см. ниже) удобнее ввести, однако, в базисе $|s, a, I, I_3, Y\rangle$.

В то время как интенсивности спонтанного излучения системы зависят от ее состояния (от чисел кооперативности s, a, I), интенсивность полного излучения (или поглощения) во внешнем поле всегда пропорциональна разности чисел молекул на соответствующих уровнях. Действительно,

интенсивности поглощения в состоянии с данными s, a, I, N_1, N_2, N_3 согласно (13) равны:

$$\begin{aligned} J_{12} &= J_{12}^{(0)}(I - I_3)(I + I_3 + 1), \\ J_{23} &= J_{23}^{(0)}[\gamma_3^2(I + I_3) + \gamma_4^2(I - I_3 + 1)], \\ I_{13} &= I_{13}^{(0)}[\gamma_3^2(I - I_3) + \gamma_4^2(I + I_3 + 1)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Используя (14), (16), получаем, что интенсивности полного излучения (или поглощения) при любых начальных состояниях пропорциональны числу активных молекул:

$$J_{32} - J_{23} \sim N_3 - N_2, \qquad J_{21} - J_{12} \sim N_2 - N_1, \qquad J_{31} - J_{13} \sim N_3 - N_1.$$

Сверхизлучающие состояния можно возбудить, если исходить из основного состояния ($kT = 0$): $N_1 = N$, $N_2 = N_3 = 0$. При этом $I = -I_3 = N_1/2$, $s = a = 0$. Если подействовать на систему сильным резонансным импульсом частоты ω_{12}, то она перейдет в состояние с $I_3 \sim 0$ (I остается максимальным). После действия импульса будет наблюдаться интенсивное излучение (см. (15) с $s = 0$). При действии на исходное состояние импульса частоты ω_{13} приходим к случаю 3 с $s = 0$ (когерентное излучение на частоте ω_{13}). Если выполнено условие $J_{31}^{(0)}N \leqslant 2J_{32}^{(0)}$, то сначала будет в основном идти распад по каналу $3 \to 2$; при этом формируется состояние с максимальным I ($\gamma_2 = 0$), которое затем интенсивно распадается. Наконец, импульсами возбуждения с частотами ω_{12} и ω_{13} газ можно перевести в состояние с $s = a = 0$, $N_1 = N_2 = N_3$, $I = I_M = {}^1/_3 N$ (при поглощении импульса частоты ω_{12} число I не меняется; так как $\gamma_4 = 0$, при поглощении второго импульса I остается максимальным). Система в этом состоянии излучает с интенсивностью, пропорциональной N^2, на всех частотах

$$\frac{J_{31}}{J_{31}^{(0)}} = \frac{J_{32}}{J_{32}^{(0)}} = \frac{J_{21}}{J_{21}^{(0)}} \sim N^2. \tag{17}$$

Сверхизлучающие состояния можно получить также, если отсортировать молекулы, находящиеся на верхнем уровне. При этом получается состояние с $N_1 = N_2 = 0$, $s = a = 0$. В ходе распада такой системы она пройдет через состояние, близкое к случаю 4 (а), так как $\gamma_2 = 0$. Если молекулы таковы, что $J_{32}^{(0)} \gg J_{31}^{(0)}$, то будут наблюдаться два последовательных интенсивных сигнала: сначала на частоте ω_{32} и затем на частоте ω_{21}. Если отобрать молекулы, находящиеся на втором уровне, то в ходе распада система пройдет через состояние 1.

Остановимся, наконец, на случае термодинамически равновесной системы. Будем предполагать, что

$$kT \gg \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Находя средние значения соответствующих операторов с помощью матрицы плотности (32), легко показать, что при условии $\bar{I}_3^2 \gg \bar{N}_1 + \bar{N}_2 \gg 1$ ($\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ — равновесные значения заселенностей) в равновесном состоянии наибольший статистический вес имеют состояния с $\bar{I} = -\bar{I}_3$. Поскольку квазиспин с помощью формул (8) может быть задан по любой паре уровней, из (14) получаем, что при выполнении условий

$$\bar{I}_3^2 \gg \bar{N}_1 + \bar{N}_2 \gg 1, \quad \bar{L}_3^2 \gg \bar{N}_1 \gg \bar{N}_3 \gg 1, \quad \bar{K}_3^2 \gg \bar{N}_2 + \bar{N}_3 \gg 1$$

величины s, a, I имеют малые отклонения от значений

$$\bar{s} = \bar{N}_2 = N\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon_3}{9kT} - \frac{\varepsilon}{6kT}\right), \qquad \bar{a} = \bar{N}_3 = N\left(\frac{1}{3} - \frac{2\varepsilon_3}{9kT}\right), \qquad \bar{I} = \frac{N\varepsilon}{6kT}. \tag{19}$$

Интенсивности откликов системы на импульсное воздействие в основном определяются состояниями с s и a, указанными в (19).

После действия сильного импульса частоты ω_{12} будет наблюдаться когерентный отклик:

$$J_{21} = J_{21}^{(0)} I(I+1) \simeq J_{21}^{(0)} N^2 \left(\frac{\varepsilon}{6kT}\right)^2, \qquad J_{31} = J_{32} \simeq 0. \tag{20}$$

После действия сильного импульса частоты ω_{23} система перейдет в состояние

$$N_2 = N_3 = {}^1/_2(\overline{N}_2 + \overline{N}_3), \qquad I_3 = {}^1/_4(\overline{N}_2 + \overline{N}_3) - {}^1/_2\overline{N}_1.$$

При этом в силу формул (13) $I = -I_3$. Для интенсивностей получаем:

$$J_{32} \simeq J_{32}^{(0)} \frac{N^2}{4} \left(\frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon}{6kT}\right)^2, \qquad J_{31} = J_{21} \simeq 0. \tag{21}$$

Примененный метод расчета позволяет выделить в интенсивностях только члены, пропорциональные N^2. Используя формализм матрицы плотности (см. разд. 5), можно найти точные формулы (не ограничиваясь, кроме того, условием (18)).

Применяя формулы разд. 5, получаем для первого случая (формула (36) с $\theta = 0$, $\varphi = 90°$, $\Gamma(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}') = 1$):

$$\begin{gathered} J_{21} = J_{20}^{(0)} N \left\{\frac{\operatorname{ch}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2} + (N-1)\left[\frac{\operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}\right]^2\right\}, \\ \frac{J_{32}}{J_{32}^{(0)}} = \frac{J_{31}}{J_{31}^{(0)}} = N \frac{\exp\varkappa_2}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2} \left(\varkappa_1 = \frac{\varepsilon}{2kT}, \ \varkappa_2 = -\frac{\varepsilon_3}{kT}\right); \end{gathered} \tag{20'}$$

для второго случая (формула (39) с $\chi = 90°$, $\Gamma(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}'') = 1$)

$$\begin{gathered} J_{32} = J_{32}^{(0)} N \left\{\frac{\exp\varkappa_2 + \operatorname{ch}\varkappa_1 - \operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2} + \frac{N-1}{4}\left[\frac{\exp\varkappa_2 - \operatorname{ch}\varkappa_1 + \operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}\right]^2\right\}, \\ \frac{J_{31}}{J_{31}^{(0)}} = \frac{J_{21}}{J_{21}^{(0)}} = \frac{N}{2} \frac{\exp\varkappa_2 + \operatorname{ch}\varkappa_1 - \operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}. \end{gathered} \tag{21'}$$

Результат воздействия импульса частоты ω_{13} на основании простых соображений, приведших к (20), (21), получить нельзя, так как при поглощении импульса возникает суперпозиция состояний с различными I. Воспользуемся результатами разд. 5 (формула (36) с $\varphi = 0$, $\theta = 90°$, $\Gamma(\mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}''') = 1$):

$$\begin{gathered} J_{31} = J_{31}^{(0)} \frac{N}{2} \left\{\frac{\operatorname{ch}\varkappa_1 + \operatorname{sh}\varkappa_2 - \exp\varkappa_2}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2} + \frac{N-1}{2}\left[\frac{\exp\varkappa_2 - \operatorname{sh}\varkappa_1 - \operatorname{ch}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}\right]^2\right\}, \\ J_{21} = J_{21}^{(0)} N \frac{\operatorname{ch}\varkappa_1 - \operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}, \qquad J_{32} = J_{32}^{(0)} \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{\exp\varkappa_2 + \operatorname{ch}\varkappa_1 + \operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}. \end{gathered} \tag{22}$$

В случаях (20) — (22) излучение на частоте приложенного импульса когерентно.

Последовательным действием двух интенсивных импульсов (с частотами ω_{12} и ω_{13}) систему можно привести в состояние, из которого наблюдается сверхизлучение на всех частотах. Интенсивности откликов при этом определяются формулами (36) с $\theta = \varphi = 90°$ и $\Gamma(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}') = \Gamma(\mathbf{k}_{13}, \mathbf{k}''') = \Gamma(\mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{12}, \mathbf{k}'') = 1$:

$$\begin{gathered} J_{21} = J_{21}^{(0)} N \left\{\frac{\operatorname{ch}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2} + \frac{N-1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}\right]^2\right\}, \\ J_{32} = J_{32}^{(0)} \frac{N}{2} \left\{\frac{\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2} + (N-1)\left[\frac{\operatorname{sh}\varkappa_1}{2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}\right]^2\right\}, \\ J_{31} = J_{32}^{(0)} N \left\{\frac{\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2}{2(2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2)} + \frac{N-1}{4}\left[\frac{2\exp\varkappa_2 - \operatorname{ch}\varkappa_1}{2(2\operatorname{ch}\varkappa_1 + \exp\varkappa_2)}\right]^2\right\}. \end{gathered} \tag{23}$$

Интенсивности излучения после воздействия нескольких импульсов зависят, вообще говоря, от их последовательности.

4. Системы большой протяженности

В оптическом диапазоне, как правило, линейные размеры системы превышают длины волн спонтанного излучения. В этом случае молекулы могут быть скоррелированы таким образом, что когерентное излучение наблюдается на разных частотах в направлениях, связанных определенными геометрическими соотношениями.

Гамильтониан взаимодействия молекул с полем имеет вид

$$H_{int} = -\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left(\frac{\hbar}{2V\omega}\right)^{1/2}\{a_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}[\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)I_{\mathbf{k}_+} + (\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4)K_{\mathbf{k}_-} + (\mathbf{e}_5 + i\mathbf{e}_6)L_{\mathbf{k}_-}] + \text{э. с.}\}, \tag{24}$$

где $a^+_{\mathbf{k}\lambda}$, $a_{\mathbf{k}\lambda}$ — бозе-операторы рождения и уничтожения фотонов.

Входящие в (24) операторы определяются формулами:

$$I_{\mathbf{k}'\pm} = \sum_{j=1}^{N} I^{(j)}_{\pm}\exp(\pm i\mathbf{k}'\mathbf{r}_j), \qquad K_{\mathbf{k}''\pm} = \sum_{j=1}^{N} K^{(j)}_{\pm}\exp(\mp i\mathbf{k}''\mathbf{r}_j),$$
$$L_{\mathbf{k}'''\pm} = \sum_{j=1}^{N} L^{(j)}_{\pm}\exp(\mp i\mathbf{k}'''\mathbf{r}_j) \tag{25}$$

и при выполнении условия

$$\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}''' \tag{26}$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям (П.1). Эти операторы вместе с диагональными операторами I_3 и Y образуют алгебру группы SU_3. Волновые функции системы молекул могут быть выбраны одновременно как собственные функции невозмущенного гамильтониана (2) и операторов Казимира $F^2_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'',\mathbf{k}'''}$, $G^2_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'',\mathbf{k}'''}$, составленных из (25) при выполнении условия (26). При этом операторы Казимира не коммутируют с операторами типа (25), имеющими индексы волновых векторов, отличные от уже выбранных. По аналогии с рассуждениями, приводящими к (14), получаем, что построенные волновые функции $|s, a, I, I_3, Y\rangle_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'',\mathbf{k}'''}$ являются состояниями системы, для которых излучение, испускаемое в направлениях $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$, $\mathbf{k}'''$ $(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''')$, на частотах ω_{12}, ω_{23}, ω_{13} соответственно когерентно. Степень когерентности задается тремя числами s, a, I, которые теперь относятся к выбранным направлениям.

Интенсивности спонтанного излучения по этим направлениям вычисляются по формулам (14), где J_{21}, $J^{(0)}_{21}$; J_{31}, $J^{(0)}_{31}$; J_{32}, $J^{(0)}_{32}$ должны интерпретироваться как скорости излучения фотонов в единицу телесного угла в направлениях $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$, $\mathbf{k}'''$, соответственно:

$$J_{21}(\mathbf{k}') = J^{(0)}_{21}(\mathbf{k}')(I + I_3)(I - I_3 + 1),$$
$$J_{32}(\mathbf{k}'') = J^{(0)}_{32}(\mathbf{k}'')[\gamma_1^2(I + I_3 + 1) + \gamma_2^2(I - I_3)], \tag{27}$$
$$J_{31}(\mathbf{k}''') = J^{(0)}_{31}(\mathbf{k}''')[\gamma_1^2(I - I_3 + 1) + \gamma_2^2(I + I_3)].$$

Излучение в направлениях $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$, $\mathbf{k}'''$ не изменяет квантовые числа s и a; излучение в других направлениях приводит к их изменению и к разрушению когерентности относительно $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$, $\mathbf{k}'''$.

Аналогично рассмотрению, проведенному выше в разд. 3, легко показать, что при падении на систему, находящуюся в основном состоянии, двух плоских волн большой интенсивности, сверхизлучающие импульсы будут наблюдаться на всех трех частотах, причем волновые векторы испускаемых фотонов однозначно задаются направлениями распространения падающих волн. Если, например, на систему воздействуют двумя импульсами $\mathbf{k}_{12}$ и $\mathbf{k}_{13}$ (с частотами ω_{12} и ω_{13}), то испускаемые системой фо-

тоны имеют волновые векторы $\mathbf{k}_{12}$ (частота ω_{12}), $\mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{12}$ (частота ω_{23}), $\mathbf{k}_{13}$ (частота ω_{13}). Действие одного импульса вызывает интенсивный отклик в том же направлении (при этом на других частотах излучение некогерентно и изотропно). Точное вычисление интенсивностей сверхизлучающих откликов проведено в следующем разделе.

5. Импульсное возбуждение когерентного излучения

Предположим, что система молекул находится в термодинамическом равновесии и облучается интенсивными импульсами разонансных частот. Положение молекул считается фиксированным. Вычисление интенсивностей излучения газа после импульсного воздействия проводится с помощью формул (ср. [1]);

$$\begin{aligned} J_{21}(\mathbf{k}') &= J_{21}^{(0)}(\mathbf{k}')\,\mathrm{Sp}\,I_{\mathbf{k}'-}\rho I_{\mathbf{k}'+}, \\ J_{32}(\mathbf{k}'') &= J_{32}^{(0)}(\mathbf{k}'')\,\mathrm{Sp}\,K_{\mathbf{k}''+}\rho K_{\mathbf{k}''-}, \\ J_{31}(\mathbf{k}''') &= J_{31}^{(0)}(\mathbf{k}''')\,\mathrm{Sp}\,L_{\mathbf{k}'''+}\rho L_{\mathbf{k}'''-}, \end{aligned} \tag{28}$$

где ρ — матрица плоскости системы молекул после действия импульсов.

Эффект импульсного воздействия на молекулу описывается унитарным преобразованием в ее энергетическом пространстве. Единственная разница в действии импульса на разные молекулы состоит в разном времени прихода волны в точку нахождения молекулы. После воздействия импульса частоты ω_{13} (волновый вектор $\mathbf{k}_{13}$), например,

$$\rho(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_1 t\right) T_{13}\rho_0 T_{13}^{-1} \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_1 t\right),$$

где ρ_0 — равновесная матрица плотности.

Вращение в подпространстве L-спина описывается оператором

$$T_{13} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} H_1^{(j)} t_j\right] \prod_{j_1=1}^{N} \exp\left[i\frac{\theta}{2}\left(L_-^{(j_1)}\beta + L_+^{(j_1)}\beta^*\right)\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} H_1^{(j)} t_j\right],$$

что после подстановки $t_j = \mathbf{k}_{13}\mathbf{r}_j/\omega_{13}$ дает

$$T_{13} = \exp\left[i\frac{\theta}{2}\left(L_{\mathbf{k}_{13}-}\beta + L_{\mathbf{k}_{13}+}\beta^*\right)\right]. \tag{29}$$

Здесь θ — угол поворота вокруг оси, направление которой в подпространстве L-спина определяет параметр β ($|\beta| = 1$) и которая перпендикулярна оси квантования (все другие преобразования в энергетическом пространстве в данном случае смысла не имеют). Параметр θ в (29) пропорционален площади импульса (произведение амплитуды на длительность), из формул (33) следует, что $\sin^2\theta/2$ — вероятность возбуждения молекулы из основного состояния на третий уровень.

Вычислим интенсивности откликов после последовательного действия импульсов частоты ω_{12} (волновой вектор $\mathbf{k}_{12}$) и частоты ω_{13} (волновой вектор $\mathbf{k}_{13}$). Временем между импульсами по сравнению с характерными временами радиационного распада системы будем пренебрегать. Матрица плотности после импульсного воздействия имеет вид

$$\rho(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_1 t\right) T\rho_0 T^{-1} \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_1 t\right), \tag{30}$$

где

$$T = T_{13}T_{12}, \qquad T_{12} = \exp\left[i\frac{\varphi}{2}\left(\alpha I_{\mathbf{k}_{12}+} + \alpha^* I_{\mathbf{k}_{12}-}\right)\right].$$