

Рубин

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ И УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АКАДЕМИИ НАУК СССР **ТОМ 69**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

И. И. Лебедев

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА

Т о м 69

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ
И УСКОРИТЕЛИ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

1973

Сборник включает в себя статьи по различным проблемам ядерной физики. В нем дан обзор современного состояния экспериментальных и теоретических исследований неупругого рассеяния протонов тяжелыми ядрами и методов измерений сечений рассеяния быстрых нейтронов ядрами.

Рассматриваются также вопросы, связанные с конструированием изохронного циклотрона: расчет траекторий частиц в секторных магнитных полях, эффекты, обусловленные кулоновским взаимодействием частиц, анализ бетатронных колебаний и др. Ряд работ посвящен различным устройствам, связанным с эксплуатацией линейного ускорителя ЛУ-50: схема и характеристики введенного в эксплуатацию тиратронного разрядника, основные параметры МВЭ, используемых для измерения интенсивности пучка электронов. Предложены разные варианты поворотных оптических систем и каналов транспортировки пучка, и дано описание библиотеки программ, используемых при электронно-оптических расчетах, выполненных в ВЦ ФИАН.

Ответственный редактор
академик Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН

А. Б. КУРЕШИН

**УПРУГОЕ И НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ПРОТОНОВ
ТЯЖЕЛЫМИ ЯДРАМИ****ВВЕДЕНИЕ**

По сравнению с исследованиями упругого и неупругого рассеяния протонов ядрами среднего атомного веса число работ, выполненных для тяжелых ядер, весьма невелико [1—3]. Между тем именно упругое и неупругое рассеяние протонов, а также нейтронов и дейтронов тяжелыми ядрами в первую очередь претендует на наиболее полное и строгое теоретическое описание. Действительно, тяжелые ядра в основном и низких возбужденных состояниях обладают ярко выраженными коллективными свойствами. Поэтому для описания взаимодействия падающих частиц с ядрами в этом случае могут быть выбраны различные варианты коллективных моделей.

Результатом сравнения экспериментов с теорией должны явиться параметры оптического потенциала изучаемых ядер, а также параметры статической или динамической деформации. Следует отметить, что в случае рассеяния на ядрах, обладающих коллективными свойствами, каналы упругого и неупругого рассеяния оказываются сильно связанными между собой. Поэтому нельзя рассматривать отдельно процессы упругого и неупругого рассеяния. Наличие каналов неупругого рассеяния может заметно менять сечение упругого рассеяния. Параметры оптического потенциала, определяемые рядом авторов [4—6] только из анализа упругого рассеяния, в связи с этим должны быть изменены, если связь каналов достаточно велика. В настоящее время разработаны методы расчета, позволяющие строго решить задачу связанных каналов [7, 8], а также приближенный метод решения с учетом эффектов второго порядка [9].

Долгое время основным методом для определения параметров деформации ядер было кулоновское возбуждение [10, 11]. При этом, разумеется, определялась деформация распределения заряда в ядре. Поскольку сейчас нельзя утверждать, что распределение заряда в ядре совпадает с распределением ядерного вещества или что протоны и нейтроны в ядре распределены одинаково [12], представляет значительный интерес сравнение деформации ядерного потенциала с деформацией распределения заряда в ядре.

Г Л А В А I

ИЗМЕРЕНИЕ УПРУГОГО И НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ПРОТОНОВ

§ 1. Основные особенности методики. Проведение измерений упругого и неупругого рассеяния протонов ядрами редкоземельной области ядер предъявляет высокие требования к качеству пучка протонов и регистрирующей аппаратуры.

Основная трудность в измерении энергетического распределения неупруго рассеянных протонов состоит в достижении достаточного энергетического разрешения для разделения групп протонов, рассеянных с возбуждением близко расположенных уровней. При изучении рассеяния на деформированных ядрах, первый вращательный уровень которых расположен при 80—100 *кэв*, необходимо отделять группу неупруго рассеянных протонов с возбуждением этого уровня от близко расположенной интенсивной группы упруго рассеянных протонов. При недостаточной монохроматичности пучка первичных протонов или плохой разрешающей способности детекторов вторичных протонов вносится ошибка не только в измеренное сечение неупругого рассеяния, но также и в сечение упругого рассеяния.

Должны быть приняты специальные меры для предотвращения ухудшения монохроматичности частиц при рассеянии на коллиматорах. Необходимо применять моноизотопные мишени.

Для надежной идентификации уровней, возбужденных при рассеянии протонов в широком интервале углов рассеяния, желательно использование мишени, изготовленной в виде самоподдерживающейся фольги. Необходимо по возможности избегать загрязнения мишени кислородом в результате окисления и углеродом вследствие образования нагара при прохождении пучка.

Из ускорителей, обеспечивающих энергию заряженных частиц свыше 10 *Мэв*, достаточную для исследования ядерного рассеяния на тяжелых ядрах, в настоящее время наилучшую монохроматичность пучка около $2 \cdot 10^{-4}$ имеют тандемные электростатические генераторы. Для изучения неупругого рассеяния на тяжелых ядрах перспективно использование изохронных циклотронов, желательно с монохроматизацией пучка [13], и специальных спектрометрических циклотронов [14].

Наилучшей разрешающей способностью около 10^4 обладают магнитные спектрометры заряженных частиц. Однако анализ частиц в них по импульсу производится в очень ограниченном интервале значений, и исследование возбуждения многих уровней с их помощью практически невозможно.

Магнитные спектрографы позволяют проводить анализ рассеянных частиц в широком диапазоне импульсов, однако повышение их разрешающей способности выше 10^3 чрезвычайно затруднительно [15, 16]. Как магнитные спектрографы, так и магнитные спектрометры обладают малой светосилой. Поэтому измерения неупругого рассеяния проводились на магнитных спектрографах в основном при 1—3 углах [17]. Эти измерения не могли дать полного углового распределения упруго и неупруго рассеянных частиц.

Лучшие образцы полупроводниковых счетчиков заряженных частиц позволяют получать разрешение около $2 \cdot 10^{-3}$ при энергиях около 10 *Мэв* и могут быть использованы для изучения неупругого рассеяния протонов с возбуждением не очень высоколежащих уровней тяжелого четно-четного ядра [18, 19]. Достаточная светосила, ограниченная лишь требованием необходимого углового разрешения, дает возможность провести измерения достаточно быстро. Анализ и регистрация импульсов от полупроводнико-

вых счетчиков быстродействующими многоканальными анализаторами также является существенным преимуществом по сравнению с просмотром фотопластинок, до сих пор преобладающих в качестве регистрирующего элемента магнитных спектрографов.

Следует, однако, обратить внимание на недостаток полупроводниковых счетчиков по сравнению с магнитными анализаторами. Распределение импульсов от полупроводникового счетчика при регистрации монохроматического пучка частиц несимметрично. Увеличение числа импульсов меньшей амплитуды обусловлено временным захватом носителей ловушками, а при больших энергиях, кроме того, возможными ядерными реакциями в материале детектора [20]. Величина асимметрии зависит от качества кристалла.

Измерения неупругого рассеяния протонов с энергией 12 Мэв ядрами редкоземельной области ядер были выполнены в тандемной лаборатории Института им. Нильса Бора (Дания). Для получения достаточного числа точек в угловом распределении протонов, рассеянных с возбуждением низколежащих уровней ядер, применялись кремниевые полупроводниковые счетчики с последующим анализом импульсов амплитудными анализаторами.

§ 2. Камера рассеяния. В работе применялась плоская камера рассеяния диаметром 28 см. Пучок протонов от тандемного электростатического ускорителя проходил по диаметру камеры на равном расстоянии между двумя фланцами. Положение и фокусировка пучка могли меняться с помощью квадрупольных магнитных линз. На входе камеры расположены коллиматоры, ограничивающие размер пучка примерно 2×2 мм. Пучок падал на тонкую мишень, укрепленную в центре камеры. Угол плоскости мишени по отношению к пучку мог меняться без нарушения вакуума.

На нижнем неподвижном фланце устанавливался под неизменным углом рассеяния полупроводниковый детектор, который служил монитором. Верхний фланец, поворачивающийся без нарушения вакуума, позволял устанавливать закрепленный на нем детектор под углами по отношению к пучку от 20 до 160° . Фланец был сделан полым внутри для заливки жидкости, охлаждающей счетчик. Все уплотнения вращающихся деталей были изготовлены в виде колец из синтетического материала неопрен с малым давлением насыщенных паров до 10^{-7} мм рт. ст.

Ток пучка измерялся интегратором тока, отделенным от корпуса камеры изолированным кольцом, на которое подавался отрицательный потенциал для подавления электронов вторичной эмиссии.

Перед полупроводниковыми детекторами расположены коллиматоры, назначение которых состояло в выделении малого интервала углов рассеяния $\pm 1^\circ$, устранении краевых эффектов детектора и вторичного рассеяния от деталей камеры и оправки мишени. Для улучшения энергетической однородности пучка как эти коллиматоры, так и коллиматоры первичного пучка на входе камеры рассеяния были изготовлены из гнutoго тонкого тантала цилиндрической формы. Доля частиц, потерявших часть энергии в материале коллиматора при рассеянии на щелях на малые углы, при такой конструкции меньше, чем в обычно употребляемых плоских заостренных щелях. Двойное рассеяние от стенок коллиматора исключалось применением дополнительных ограничительных диафрагм несколько большего размера, чем основные диафрагмы.

Мишени из разделенных изотопов были двух типов: прокатанные из металла, имевшие толщину от $0,5$ до 1 мг/см², и напыленные на углеродную пленку — от 120 до 200 мкг/см². Площадь мишени около 1 см².

Разделенные изотопы редкоземельных металлов получались из окиси в реакции замещения соответствующего элемента лантаном. Работа велась по методике, изложенной в статье [21].

Изотопы Sm и Yb восстанавливались из окисей при реакции с La, проходящей при температуре 1300° С:



Пары самария или иттербия конденсировались на танталовой пластинке. Получаемые кусочки металла подвергались холодной обработке — прокату между двумя пластинками из нержавеющей стали. Свободная металлическая пленка приклеивалась к рамке. Оставшиеся мелкие кусочки металла использовались для изготовления напыленных мишеней.

§ 3. Детекторы протонов и электронное оборудование. Для получения наилучшего разрешения и надежной идентификации уровней, возбуждаемых при неупругом рассеянии протонов, необходимо вести измерения с полупроводниковым счетчиком, обедненная область которого — рабочий слой — превышал бы полный пробег протонов максимальной энергии. Для протонов с энергией 12 Мэв пробег в кремнии составляет 1 мм. Однако рабочий слой первых поверхностно-барьерных полупроводниковых счетчиков, изготовленных фирмой ORTEC (США), не превышал 0,5 мм при напряжении смещения около 150 в. В то же время имелись поверхностно-барьерные счетчики dE/dx толщиной 50—200 мкм.

В ряде серий измерений использовалась телескопическая система, состоящая из двух таких счетчиков и одного обычного поверхностно-барьерного счетчика с рабочим слоем около 0,5 мм. Разрешение, получаемое с помощью такого E -счетчика для альфа-частиц с энергией 5,5 Мэв при использовании предусилителя ORTEC 101-201 с уровнем шумов 10 кэв, составляет 20 кэв. Счетчик изготовлен из кремния с удельным сопротивлением 7500 ом·см. Известно, что разрешение, получаемое с помощью dE/dx -счетчиков, обычно несколько хуже, чем получаемое с помощью E -счетчика. Причиной этого является в основном неоднородность толщины этих счетчиков. Однако в телескопической системе, где используется суммарный импульс с трех счетчиков, флюктуации импульсов из-за неоднородности dE/dx -счетчика компенсируются соответствующим изменением величины импульса от конечного счетчика полного поглощения.

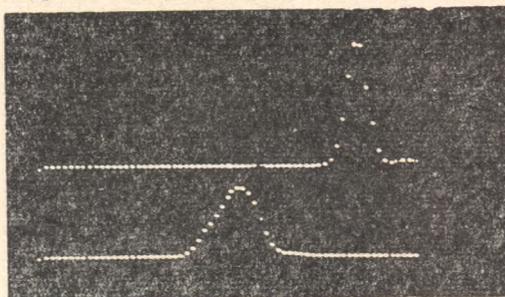
В других измерениях также использовался полупроводниковый кремниевый счетчик диаметром 7 мм, полученный методом дрейфа лития. Счетчик был изготовлен фирмой TMC (США). Толщина рабочей области этого счетчика составляла 2 мм при напряжении смещения 200—300 в. Этот счетчик для получения достаточного разрешения должен быть охлажден с целью уменьшения уровня тепловых шумов. Охлаждающие жидкости заливались в полый поворотный фланец, на котором внутри камеры укреплялся детектор. Было исследовано разрешение (ширина пика рассеянных протонов на половине высоты пика), выраженное в кэв, в зависимости от температуры детектора. Наилучшее разрешение около 18 кэв для протонов с энергией 12 Мэв было получено при температуре около —30° С.

В качестве предусилителей использовались стандартные малошумящие усилители типа ORTEC с шумами около 10 кэв с подсоединенным детектором. Длительность импульсов — 50 мксек, фронт — 1 мксек. Основные усилители фирмы TMC с двойным дифференцированием импульса и стабилизацией средней точки обеспечивали постоянство коэффициента усиления в течение длительных измерений.

Для анализа и регистрации спектров импульсов от упруго и неупруго рассеянных протонов служили амплитудные многоканальные анализаторы RCL — 512-канальный и двумерный TMC — 64×64 канала. В настоящей работе последний анализатор использовался для регистрации сразу двух спектров, по 1024 канала каждый, с двух детекторов. Все анализаторы позволяли измерять живое время измерения, знание которого

Рис. 1. Спектры импульсов от генератора при длительном измерении

Вверху с использованием стабилизатора спектра, внизу без него



необходимо для нормировки результатов. Действительно, для анализа каждого импульса требуется определенное время, в течение которого анализатор не регистрирует следующий импульс. Обычно измеряют так называемое внутреннее живое время. Для этого импульсы от специального генератора подаются на вход анализатора, при этом регистрируется лишь часть импульсов, соответствующая доле времени, когда анализатор находится в состоянии готовности для регистрации импульсов. Такой метод измерения живого времени непригоден при работе на ускорителях вследствие возможных колебаний тока пучка. В этом случае вместо импульсов от генератора использовались импульсы монитора и таким образом учитывались возможные изменения скорости счета.

Несмотря на меры, принятые для стабилизации отдельных элементов усилительного тракта, было замечено, что разрешение, получаемое в коротких измерениях (несколько минут), выше, чем в длительных измерениях (около часа). При регистрации частиц высоких энергий стабильность усилительного тракта приобретает все большее значение. Стабильность коэффициента усиления 10^{-3} при регистрации частиц с энергией 1 Мэв дает разрешение 1 кэв , что пренебрежимо мало по сравнению с собственными шумами предусилителя. Однако при регистрации частиц с энергией 10 Мэв — это уже сравнимые величины. Поэтому в ряде первых серий измерений длительные измерения разбивались на несколько коротких, затем по пику от упруго рассеянных протонов, имеющему лучшую статистическую точность, спектры смещались и суммировались. Такая процедура требует, однако, значительного времени для обработки результатов измерений.

В дальнейшем в ряде серий измерений был использован стабилизатор спектра, принцип действия которого состоит в автоматической подстройке усиления входного усилителя анализатора при относительно медленных изменениях коэффициента усиления тракта. Для работы стабилизатора в спектре должен иметься четко выделенный пик. Можно замешивать в спектр линию от постоянного радиоактивного источника, можно подавать на вход предусилителя импульс от стабилизированного генератора. В настоящих измерениях использовался четко выделенный пик упругого рассеяния. Величина счета в двух каналах по разным сторонам пика сравнивалась между собой с учетом статистических флуктуаций. Смещение спектра в результате нестабильности аппаратуры приводит к изменению упомянутой величины и соответствующему повороту шагового мотора, соединенного с потенциометром усилителя. На рис. 1 для иллюстрации эффективности стабилизатора спектра приведен внизу спектр импульсов от генератора, пропущенных через весь усилительный тракт, вверху — тот же спектр с включенным стабилизатором спектра.

§ 4. Спектры упруго и неупруго рассеянных протонов. Из рассмотренных энергетических соотношений для взаимодействия протонов с ядрами

редкоземельной области ядер можно сделать вывод о том, что все наблюдаемые интенсивные пики в спектре импульсов полного поглощения соответствуют упругому и неупругому рассеянию протонов. Для ядер ^{148}Sm , ^{154}Sm , ^{174}Yb энергия реакции (p, t) составляет около -6 Мэв , энергия реакции $(p, {}^3\text{He})$ около -8 Мэв , энергия реакции (p, d) около $-5 \div -6 \text{ Мэв}$ [22]. Таким образом, эти реакции дают частицы, импульсы от которых располагаются в спектре значительно ниже, чем импульсы от протонов с энергией около 12 Мэв . Реакция (p, α) на исследованных ядрах экзоэнергетична, энергия реакции составляет около $+6 \div +7 \text{ Мэв}$. Альфа-частицы, соответствующие переходу на основной и низковозбужденные уровни остаточного ядра, расположены существенно выше по спектру, чем протоны. В область спектра протонов попадают лишь альфа-частицы при возбуждении высоких близко расположенных уровней или при вылете дополнительно еще одного нуклона. Такие альфа-частицы не могут дать четко выделенных линий, но могут быть причиной плавного фона импульсов. Число их, как оценивалось по виду спектра импульсов, больших, чем импульсы от упруго рассеянных протонов, пренебрежимо мало.

Наличие реакций (p, d) , (p, t) и $(p, {}^3\text{He})$ тем не менее ограничивает продвижение в область высоких возбуждений остаточного ядра без использования систем идентификации частиц, например двумерных спектров E и dE/dx .

Ограничение по энергии возбуждения при использовании полупроводниковых счетчиков также возникает из-за наличия «хвостов» от групп протонов, расположенных выше по спектру. Как указывалось выше, «хвосты» обусловлены временным захватом носителей заряда в счетчике ловушками. Они создают плавный фон в области малых величин импульсов. Выделение групп протонов, соответствующих слабо возбуждающимся уровням, может оказаться невозможным.

Помимо протонов, рассеянных на ядрах мишени, в спектрах присутствуют также протоны, рассеянные на примесях. На поверхности мишени имеется тонкая окисная пленка, поэтому наблюдается рассеяние протонов на кислороде. Некоторая примесь углерода образуется при прохождении пучка через мишень и выгорании органических загрязнений. При технологическом процессе изготовления материала мишени и самой мишени возможно загрязнение более тяжелыми элементами.

Некоторые из полученных спектров приведены на рис. 2—9. Достижимое разрешение определяется в основном шумами детектора и предусилителя и стабильностью усиления основного тракта. Энергетическое размытие пучка составляет около $1-2 \text{ кэв}$ и вносит малый вклад в суммарное разрешение. Страгглинг пучка протонов при энергии 12 Мэв в используемых мишенях толщиной около $0,5 \text{ мг/см}^2$ составляет 6 кэв [23]. Кроме того, существенно положение мишени по отношению к пучку падающих и рассеянных протонов. Толщина мишени составляет 9 кэв при энергии 12 Мэв [24]. Если пучок протонов «проходит» через мишень, что возможно осуществить при углах рассеяния меньше $90-100^\circ$, то вне зависимости от места ядерного взаимодействия суммарные ионизационные потери падающего и рассеянного протонов будут одинаковы для всех частиц. Ухудшение разрешения будет обуславливаться лишь неоднородностью толщины мишени. При углах рассеяния, больших $90-100^\circ$, пучок «отражается» от мишени, и в зависимости от места ядерного взаимодействия рассеянные протоны могут отличаться по энергии на двойную толщину мишени. Таким образом, при больших углах рассеяния для получения наилучшего разрешения надо вести измерения с возможно более тонкой мишенью.

Как видно из рис. 2, 3, наилучшее разрешение 23 кэв было получено при угле рассеяния 80° в условиях «прохождения» мишени с применением стабилизатора спектра.

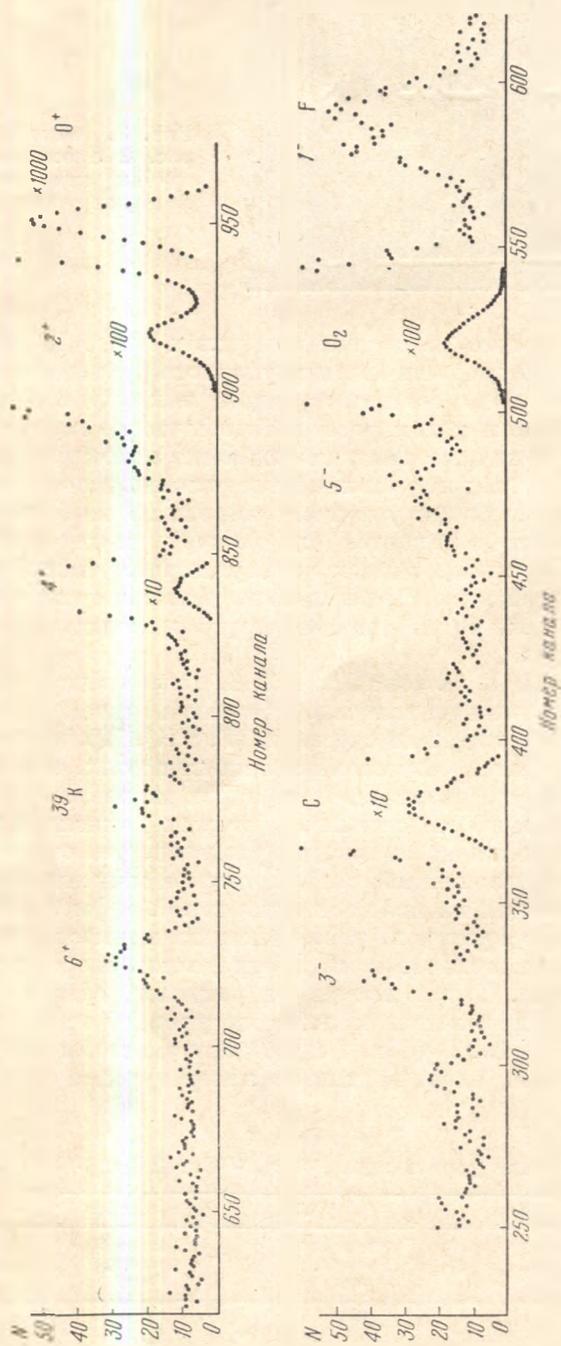


Рис. 2. Спектр прогибов, рассеянных на $1Mn$ под углом 80° Пучок «проходит» через мишень. Использован стабилизатор спектра. Мишень представляет собой самоподдерживающуюся металлическую фольгу

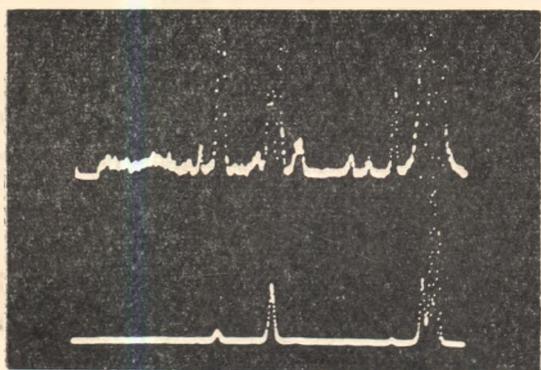


Рис. 3. Фотография спектра рис. 2 с осциллографической трубки анализатора, снятая с двумя чувствительностями

Измерения неупругого рассеяния при углах менее 60° затрудняются вследствие значительного роста сечения упругого рассеяния и увеличения доли малых импульсов от соответствующего пика протонов.

Измерение под одним углом рассеяния обычно не позволяет надежно идентифицировать различные пики, наблюдаемые в спектре. Однако сравнение спектров, полученных под различными углами, дает возможность выделить пики, соответствующие упругому рассеянию на более легких примесях, которые заметно смещаются по спектру из-за кинематического изменения энергии протонов с изменением угла рассеяния. Энергия протонов, рассеянных на тяжелых ядрах, мало изменяется при изменении угла, и соответствующие пики от упруго и неупруго рассеянных протонов мало смещаются на спектре.

Сравнивая рис. 2 и 4, а также 5, 6 и 7, 8, можно выделить пик от протонов, упруго рассеянных на углероде (обозначен буквой С) и на кислороде (O_2), а также на более тяжелых примесях (F, ^{39}K). При некоторых углах рассеяния энергия протонов, рассеянных на примесях, совпадает с энергией протонов, неупруго рассеянных на ядрах мишени.

При использовании относительно старых окисленных мишеней (рис. 7, 8) пик рассеяния на кислороде раздвоен, что соответствует рассеянию на окиси, расположенной с двух сторон мишени. Как видно из рис. 2, 4, при рассеянии на новой мишени такой эффект исчезает.

Вычислив энергию протонов, рассеянных на примеси, можно проградировать величину импульсов в *кэв* и определить энергии возбуждения уровней ядер мишени. Такая процедура уступает, однако, по точности непосредственному определению положения уровней при использовании магнитного спектрографа. В табл. 1 приведены значения энергий нижних уровней исследованных ядер, взятые из литературы, а также их спины

Таблица 1
Низлежащие уровни ядер ^{148}Sm , ^{154}Sm [25] и ^{171}Yb [26]

^{148}Sm		^{154}Sm		^{171}Yb		^{148}Sm		^{154}Sm	
Энергия уровня, <i>кэв</i>	I^π								
0	0+	0	0+	0	0+	1663	(2+)	1178	5-, 2+''
551	2+	82	2+	76,5	2+				
1162	3-	267	4+	252	4+	1733	4+	1372	4+''
1181	4+	542	6+	527	6+	2094	6+	1437	2+'
1454		920	1-					1474	1-
1465	1-	1011	3-					1581	3-
1594	5-	1096	0+''					1666	4+

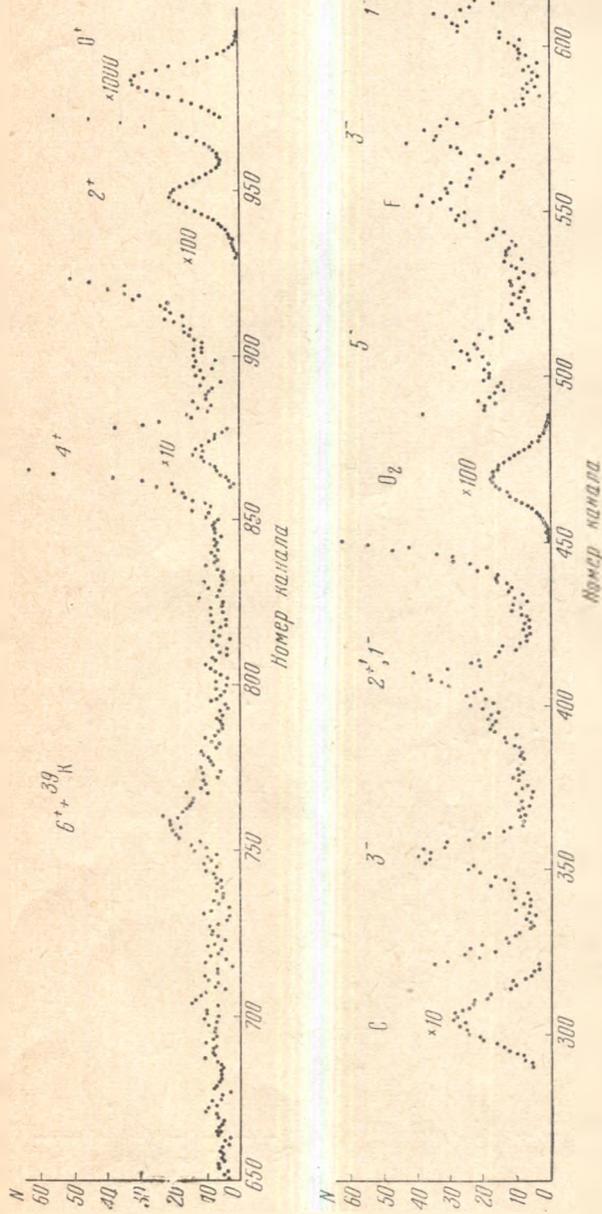


Рис. 4. Спектр протонов, рассеянных на ^{164}Sm под углом 90° .
Условия эксперимента такие же, как на рис. 2

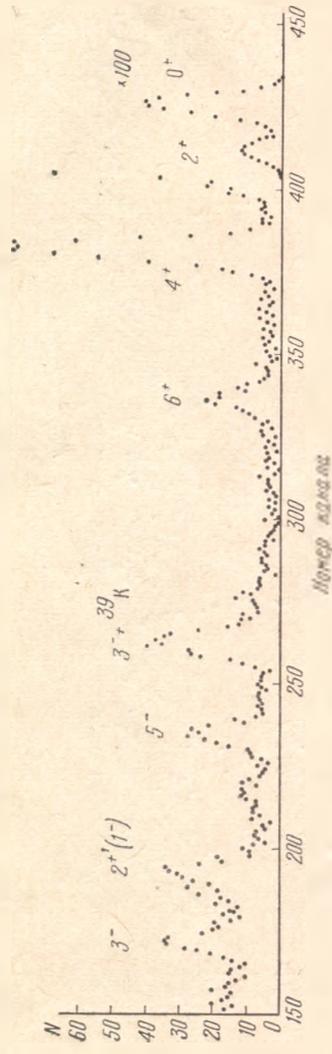


Рис. 5. Спектр протонов, рассеянных на ^{164}Sm под углом 130° .
Пучок «отражается» от мишени. Спектр представляет собой сумму спектров четырех коротких серий измерений, сдвинутых друг относительно друга до совпадения пиков от упруго рассеянных протонов

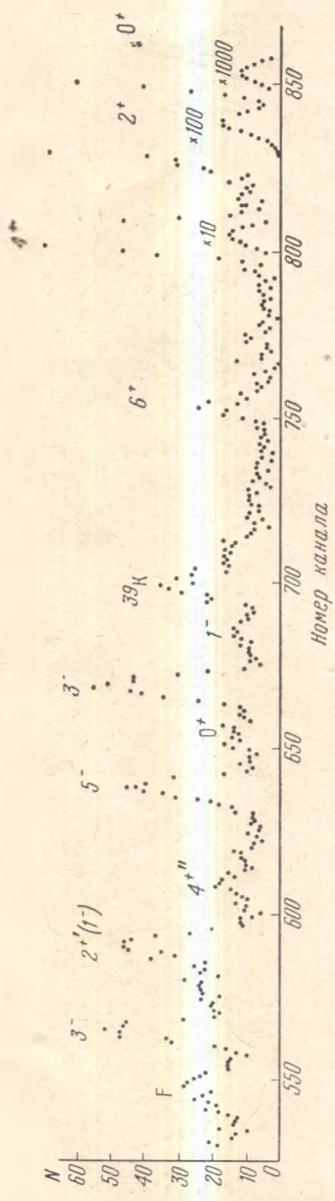


Рис. 6. То же, что на рис. 5, для угла рассеяния 160° .

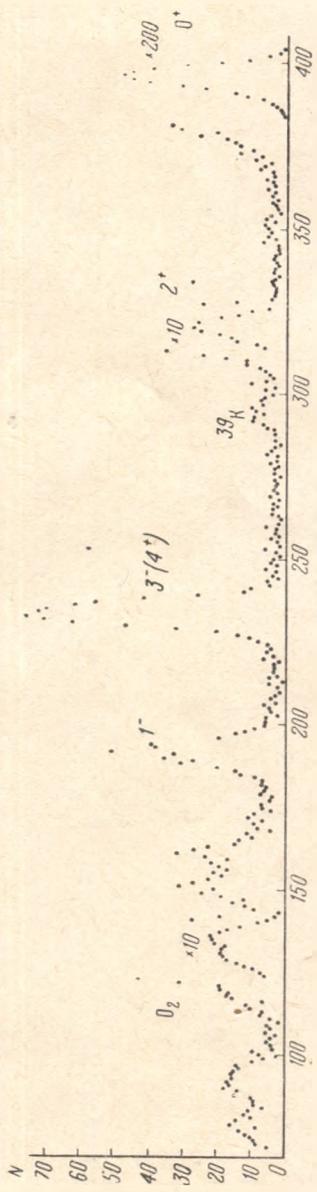


Рис. 7. Спектр протонов, рассеянных на ^{148}Sm под углом 120° .

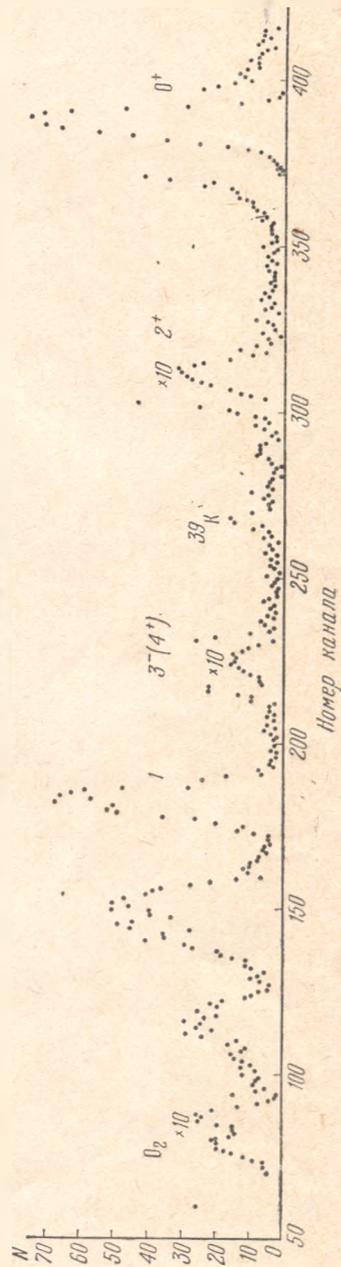


Рис. 8. Спектр протонов, рассеянных на ^{148}Sm под углом 140° .

Т а б л и ц а 2
Идентификация уровней ^{154}Sm по спектру рис. 4

Расстояние до упругого пика в числе каналов	Расчетная энергия, кэв	Сравнение с известными уровнями, кэв	I^π	Расстояние до упругого пика в числе каналов	Расчетная энергия, кэв	Сравнение с известными уровнями, кэв	I^π
0	0	0	0+	409	1040	1011	3-
34	86	82	2+	475	1208	1178	5-, 2+''
111	282	267	4+	574	1460	1437	2+'
223	566	542	6+	—	—	1474	1-
373	947	920	1-	627	1590	1581	3-

и четности (I^π). В табл. 2 приведены значения энергий уровней ^{154}Sm , полученные при анализе спектра рис. 4. Наблюдаемое расхождение, возможно, объясняется нелинейностью шкалы анализатора по каналам. Тем не менее возможна надежная идентификация уровней. Слабо возбуждающиеся уровни видны лишь при больших углах рассеяния. Так, на рис. 5 при угле рассеяния 130° наблюдаются уровни 1096 кэв 0^+ и 1372 кэв $4^{+''}$. Уровни 1437 $2^{+'}$ и 1474 1^- не разрешены.

Анализ спектров протонов, рассеянных на ^{148}Sm (рис. 7, 8), позволяет выделить группу протонов, соответствующих возбуждению уровня 2^+ при 551 кэв. Группы протонов, неупруго рассеянных с возбуждением уровней 1162 кэв 3^- и 1181 кэв 4^+ , а также 1454 и 1465 кэв 1^- не разрешаются. При более высоких энергиях возбуждения находится плохо разрешенная группа уровней 1594, 1663, 1733 кэв (рис. 8).

При изучении неупругого рассеяния на ^{174}Yb основное внимание было обращено на исследование возбуждения уровней 0^+ , 2^+ , 4^+ , 6^+ вращательной серии основного состояния.

Для измерения неупругого рассеяния с возбуждением первых возбужденных вращательных состояний 2^+ на ^{154}Sm и ^{174}Yb в условиях хорошего разрешения был проведен ряд серий измерений с использованием тонких мишеней $150\text{--}200 \text{ мкг/см}^2$, напыленных на углеродную пленку толщиной около 50 мкг/см^2 . Примеры полученных спектров приведены на рис. 9.

§ 5. Определение дифференциальных эффективных сечений упругого и неупругого рассеяния протонов. Абсолютные значения дифференциальных эффективных сечений находились путем нормировки выхода сечения упругого рассеяния для каждого элемента к малым энергиям налетающих протонов (5 или 6 Мэв). При таких энергиях и угле рассеяния 45° сечение принималось чисто кулоновским. Сравнивался выход упругого рассеяния при заданном неизменном угле рассеяния при двух энергиях, 12 и 5 Мэв (или 6 Мэв). Относительные значения тока пучка измерялись с помощью цилиндра Фарадея и интегратора. Для тяжелых ядер редкоземельной области сделанное допущение о малости ядерного взаимодействия по сравнению с кулоновским при малых энергиях и небольших углах оправдывается с большой точностью. При энергии 12 Мэв отношение измеренного сечения к резерфордскому при угле рассеяния 45° составляет около 0,85—0,9.

Определение сечений, соответствующих другим углам рассеяния, проводилось путем сравнения выходов упругого рассеяния основного счетчика, положение которого по отношению к пучку менялось, и монитора-детектора, расположенного при неизменном угле рассеяния. Использование монитора вместо интегратора исключает ошибки такого рода, как, например,

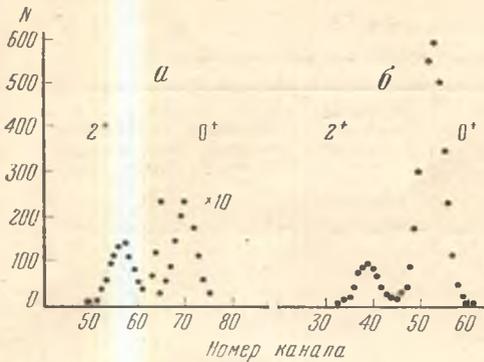


Рис. 9. Спектры протонов, рассеянных на ^{154}Sm при использовании тонких мишеней на углеродной подложке
 а — угол рассеяния 90° , б — 130°

обусловленные возможным перемещением пучка по мишени при неоднородной по толщине мишени.

Дифференциальные сечения неупругого рассеяния протонов с возбуждением уровней ядра мишени определялись по отношению выходов неупругого и упругого рассеяния. Выходы находились из полученных спектров протонов по площади соответствующих пиков после вычитания плавного фона. В случае недостаточного разрешения проводилось графическое построение симметричных пиков. При некоторых углах рассеяния пики от протонов, рассеянных на примесях, в мишени сливались с отдельными группами неупруго рассеянных протонов. Для интенсивных линий в этих случаях производилось вычитание вклада рассеяния на примеси, определенное из интерполяции по соседним углам рассеяния.

Во всех случаях определялось живое время анализатора, регистрирующего спектр основного счетчика, и анализатора, регистрирующего спектр монитора. Во всех измерениях живое время было не менее 90%.

Таким образом, сечение рассеяния определялось по формуле

$$\sigma(\theta) = \sigma_{\text{уп}}(45^\circ) \frac{R(\theta)}{R_{\text{уп}}(45^\circ)},$$

где $\sigma_{\text{уп}}(45^\circ)$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния при угле 45° , определенное по нормировке к малым энергиям;

$$R_{\text{уп}}(45^\circ) = \frac{W_{\text{упр. о}}}{W_{\text{упр. м}}} \cdot \frac{T_{\text{м}}}{T_{\text{о}}},$$

где $W_{\text{упр. о}}$, $T_{\text{о}}$ и $W_{\text{упр. м}}$, $T_{\text{м}}$ — соответственно выходы и живое время основного счетчика и монитора при измерении с основным счетчиком под углом 45° .

$$R(\theta) = \frac{w_{\text{о}}}{w_{\text{м}}} \cdot \frac{t_{\text{м}}}{t_{\text{о}}},$$

где $w_{\text{о}}$, $t_{\text{о}}$ — выход и живое время основного счетчика, расположенного под углом рассеяния θ , а $w_{\text{м}}$, $t_{\text{м}}$ — выход и живое время монитора, расположенного под неизменным углом рассеяния.

§ 6. Результаты измерений дифференциальных эффективных сечений упругого и неупругого рассеяния протонов. Результаты измерений сечений упругого и неупругого рассеяния протонов на ядрах ^{148}Sm , ^{154}Sm и ^{174}Yb приведены в табл. 3—7 и рис. 10—18. Энергия протонов во всех измерениях составляла 12 Мэв.

Значения сечений упругого рассеяния при малых углах рассеяния для всех исследованных изотопов близки к значениям кулоновского рассеяния, рассчитанного по формуле Резерфорда. При увеличении угла рассеяния сечение становится меньше резерфордского. Вследствие резкой зависимости сечения от угла рассеяния для выделения качественных законо-

Таблица 3

Дифференциальные сечения упругого и неупругого рассеяния протонов с энергией 12 Мэв на ^{148}Sm , мбн/стера

θ°	2^+ 551 кэв	3^- 1162 кэв (1181 кэв)	4^+ 1465 кэв (1454 кэв)	$\sigma_{\text{упр}}/\sigma_{\text{рез}}$
160	0,662±0,012	0,357±0,01	0,127±0,015	0,388±0,007
150	0,665±0,012	0,364±0,01	0,134±0,015	0,376±0,007
140	0,728±0,015	0,362±0,01	0,151±0,015	0,401±0,008
130	0,910±0,020	0,340±0,01	0,154±0,015	0,480±0,009
120	—	0,283±0,010	0,146±0,008	—
110	—	—	0,141±0,015	—
105	0,890±0,015	0,285±0,010	0,130±0,018	0,549±0,01
100	0,834±0,025	0,337±0,015	—	—
95	0,780±0,020	0,430±0,015	—	0,507±0,01
90	0,775±0,023	0,490±0,050	0,163±0,010	—
85	—	—	0,187±0,018	—
80	—	0,574±0,020	—	—
75	1,480±0,035	0,590±0,030	0,190±0,020	0,748±0,015
70	1,860±0,055	0,460±0,050	0,190±0,015	0,835±0,015
65	2,27±0,15	0,445±0,040	0,180±0,040	0,866±0,02
60	2,55±0,07	0,37±0,03	0,200±0,030	0,912±0,02

Таблица 4

Отношение дифференциального сечения упругого рассеяния протонов ядрами ^{148}Sm при 12 Мэв (мбн/стера) (с использованием тонкой мишени) к кулоновскому сечению

θ°	$\sigma/\sigma_{\text{рез}}$	θ°	$\sigma/\sigma_{\text{рез}}$	θ°	$\sigma/\sigma_{\text{рез}}$	θ°	$\sigma/\sigma_{\text{рез}}$
20	1,12±0,05	45	0,841±0,02	65	0,876±0,02	135	0,396±0,01
25	1,14±0,05	50	0,857±0,02	85	0,520±0,01	140	0,360±0,01
30	1,104±0,03	55	0,825±0,02	90	0,512±0,01	145	0,345±0,01
35	1,015±0,03	60	0,886±0,02	95	0,473±0,01	160	0,338±0,01
40	0,923±0,03			120	0,509±0,01		

Таблица 5

Дифференциальные сечения упругого рассеяния протонов с энергией 12 Мэв ядрами ^{154}Sm и неупругого рассеяния с возбуждением уровня 2^+ (82 кэв) (при использовании тонкой напыленной мишени)

θ°	$\sigma_{\text{упр}}$, мбн/стера	$\sigma_{\text{упр}}/\sigma_{\text{рез}}$	$\sigma(2^+, 82 \text{ кэв})$, мбн/стера	θ°	$\sigma_{\text{упр}}$, мбн/стера	$\sigma_{\text{упр}}/\sigma_{\text{рез}}$	$\sigma(2^+, 82 \text{ кэв})$, мбн/стера
45	1400	0,868±0,02	—	120	27,6	0,448±0,01	3,12±0,11
60	460	0,830±0,02	—		26,2	0,425±0,01	
70	233+	0,730±0,015	—	130	18,6	0,362±0,008	2,86±0,11
	239	0,750±0,015	—		18,5	0,360±0,008	2,68±0,11
80	110+	0,545±0,012	4,60±0,12		19,0	0,370±0,01	
	113	0,557±0,015	—	140	14,0	0,315±0,008	2,80±0,09
90	63,6	0,460±0,01	3,80±0,15		14,2	0,320±0,01	
	63,0+	0,455±0,01	4,41±0,10	150	11,5	0,289±0,006	2,82±0,09
100	44,3	0,442±0,01	3,82±0,15		11,1	0,280±0,008	
	47,2	0,470±0,01	—	160	9,85	0,268±0,006	2,58±0,08
110	34,6	0,451±0,01	3,28±0,12				
	36,5	0,475±0,01	—				

Примечание. Знаком плюс помечены измерения, выполненные с прокатанной самоподдерживающейся мишенью.

Таблица 6

Дифференциальные сечения неупругого рассеяния протонов с энергией 12 Мэв ядрами ^{154}Sm , мбн/степ

θ^*	2^+ (82 кэВ)	4^+ (257 кэВ)	6^+ (542 кэВ)	3^- (1011 кэВ)	5^- (1178 кэВ)	3^+ (1437 кэВ)	4^+ (1666 кэВ)
160	—	$0,176 \pm 0,005$	$0,133 \pm 0,0015$	—	$0,034 \pm 0,004$	$0,086 \pm 0,008$	$0,083 \pm 0,01$
160	$3,03 \pm 0,11$	$0,172 \pm 0,006$	$0,0375 \pm 0,004$	—	$0,045 \pm 0,004$	$0,059 \pm 0,004$	$0,050 \pm 0,01$
155	—	$0,174 \pm 0,005$	$0,033 \pm 0,0015$	—	$0,035 \pm 0,003$	$0,088 \pm 0,008$	$0,081 \pm 0,01$
150	—	$0,176 \pm 0,005$	$0,033 \pm 0,0015$	—	$0,040 \pm 0,004$	$0,085 \pm 0,01$	$0,085 \pm 0,01$
145	—	$0,180 \pm 0,005$	$0,030 \pm 0,0015$	—	$0,046 \pm 0,004$	$0,072 \pm 0,01$	$0,086 \pm 0,01$
140	—	$0,185 \pm 0,005$	$0,026 \pm 0,004$	$0,057 \pm 0,005$	$0,052 \pm 0,005$	$0,077 \pm 0,01$	$0,076 \pm 0,01$
130	$2,97 \pm 0,10$	$0,212 \pm 0,005$	$0,019 \pm 0,002$	$0,089 \pm 0,005$	$0,055 \pm 0,004$	$0,071 \pm 0,015$	$0,058 \pm 0,01$
130	—	$0,201 \pm 0,01$	$0,027 \pm 0,005$	$0,059 \pm 0,006$	$0,039 \pm 0,006$	—	—
120	$3,35 \pm 0,15$	$0,252 \pm 0,01$	$0,012 \pm 0,005$	$0,078 \pm 0,004$	$0,044 \pm 0,003$	—	—
120	—	$0,253 \pm 0,007$	—	$0,074 \pm 0,004$	$0,041 \pm 0,003$	—	—
110	$3,59 \pm 0,15$	$0,240 \pm 0,006$	$0,020 \pm 0,003$	$0,083 \pm 0,003$	$0,034 \pm 0,003$	—	—
100	$4,34 \pm 0,3$	$0,200 \pm 0,01$	—	$0,064 \pm 0,01$	—	—	—
90	$4,18 \pm 0,3$	$0,162 \pm 0,01$	—	—	—	—	—
90	$4,02 \pm 0,2$	$0,170 \pm 0,01$	—	—	—	—	—
90	$4,40 \pm 0,1$	$0,196 \pm 0,007$	—	$0,059 \pm 0,004$	$0,032 \pm 0,003$	—	$0,049 \pm 0,004$
80	$4,60 \pm 0,1$	$0,212 \pm 0,008$	$0,049 \pm 0,008$	—	$0,061 \pm 0,01$	$0,053 \pm 0,005$	$0,045 \pm 0,004$
80	$4,25 \pm 0,3$	$0,16 \pm 0,02$	—	—	—	—	—
70	$5,3 \pm 0,5$	—	—	—	—	—	—
60	$8,8 \pm 0,9$	—	—	—	—	—	—

Т а б л и ц а 7

Дифференциальные сечения упругого и неупругого рассеяния протонов с энергией 12 Мэв ядрами ^{174}Yb , мбн/стер

θ°	2+ (76,5 кэв)	4+ (252 кэв)	$\sigma_{\text{упр}}/\sigma_{\text{рез}}$
160	$3,52 \pm 0,12$	$0,201 \pm 0,01$	$0,387 \pm 0,006$
155	$3,33 \pm 0,17$	$0,220 \pm 0,02$	$0,394 \pm 0,006$
150	$3,43 \pm 0,17$	$0,214 \pm 0,02$	$0,414 \pm 0,006$
145	$3,94 \pm 0,2$	—	$0,412 \pm 0,006$
140	$3,96 \pm 0,2$	—	$0,424 \pm 0,006$
135	$4,24 \pm 0,15$	$0,215 \pm 0,015$	$0,428 \pm 0,006$
130	$4,31 \pm 0,25$	$0,204 \pm 0,02$	$0,431 \pm 0,007$
125	$4,60 \pm 0,2$	$0,215 \pm 0,01$	$0,445 \pm 0,007$
120	$5,35 \pm 0,3$	$0,220 \pm 0,02$	$0,445 \pm 0,007$
115	$4,89 \pm 0,3$	$0,193 \pm 0,02$	$0,477 \pm 0,007$
110	$5,47 \pm 0,3$	$0,233 \pm 0,025$	$0,511 \pm 0,006$
100	$6,17 \pm 0,35$	—	$0,562 \pm 0,008$
95	$5,68 \pm 0,35$	—	$0,588 \pm 0,009$
90	$6,06 \pm 0,25$	$0,161 \pm 0,01$	$0,600 \pm 0,008$
85	$6,17 \pm 0,5$	—	$0,624 \pm 0,009$
80	$6,50 \pm 0,6$	—	$0,665 \pm 0,012$
70	$8,0 \pm 0,9$	—	$0,748 \pm 0,015$
60	$12,0 \pm 1,7$	—	$0,824 \pm 0,016$
50	—	—	$0,878 \pm 0,017$
45	—	—	$0,907 \pm 0,02$
40	—	—	$0,975 \pm 0,02$
35	—	—	$1,04 \pm 0,03$
30	—	—	$1,01 \pm 0,05$
25	—	—	$0,95 \pm 0,05$
20	—	—	$1,07 \pm 0,05$

Примечание. Величина сечения для возбуждения уровня 6+ (527 кэв) измерена только для двух углов: $\sigma(150^\circ) = 0,0209 \pm 0,002$ мбн/стер, $\sigma(160^\circ) = 0,0211 \pm 0,002$ мбн/стер.

мерностей в поведении сечений на рис. 10, 12, 17 приведены значения отношений измеренных сечений упругого рассеяния и резерфордского сечения.

В таблицах указаны относительные ошибки измерений, определяемые статистической точностью измерений, оценкой ошибок при обработке спектров за счет разделения пиков и вычета фона. Абсолютные значения сечений в калибровочных точках определялись с высокой статистической точностью лучше 1%. Ошибки при обработке спектров в этих точках также невелики и, по-видимому, не превышают 1—1,5%. Применялись тонкие однородные мишени, поэтому ток мог измеряться интегратором с высокой точностью. Таким образом, для нахождения абсолютных погрешностей измерений следует к ошибкам, указанным в таблицах, прибавить квадратично ошибку около 1—2%.

Относительная точность сечений упругого рассеяния лишь при самых малых углах достигает 5%, при больших углах составляет, как правило, 2—3%. Относительная точность сечений неупругого рассеяния, составляющего малую долю от упругого, несколько хуже. Измерения сечений неупругого рассеяния при углах, меньших 60° , сейчас, по-видимому, возможны только с помощью магнитных спектрографов с высоким разрешением. Величина разрешения полупроводниковых детекторов, достигнутая в настоящей работе, была недостаточна для отделения неупруго рассеянных протонов от рассеянных на примесях при малых углах рассеяния. Следует отметить, что сечения всех упругих процессов растут (за счет вклада кулоновского рассеяния) к малым углам, в то время как сечения неупругого рассеяния увеличиваются в значительно меньшей степени.

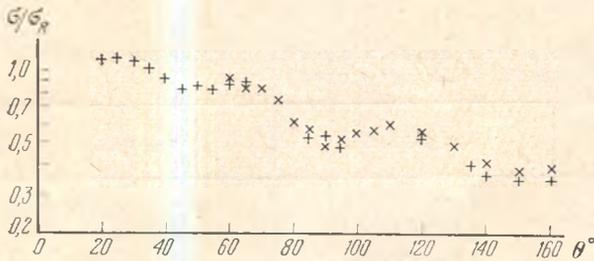


Рис. 10. Отношение дифференциального сечения упругого рассеяния протонов на ядре ^{148}Sm к соответствующему резерфордскому сечению для двух серий измерений (разные точки)

Энергия протонов 12 Мэв

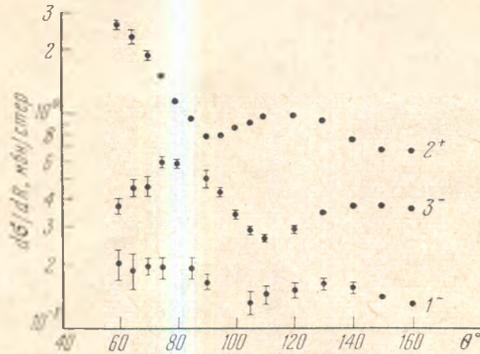


Рис. 11. Дифференциальные сечения неупругого рассеяния протонов с возбуждением нижних состояний ^{148}Sm 551 кэв 2^+ , 1162 кэв 3^- (с примесью 1181 кэв 4^+), 1465 кэв 1^- (1454 кэв)

Энергия протонов 12 Мэв

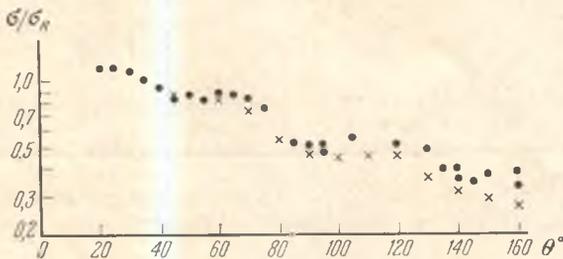


Рис. 12. Сравнение отношений дифференциального сечения упругого рассеяния протонов к резерфордскому сечению для ядер ^{148}Sm (точки) и ^{154}Sm (крестики)

Энергия протонов 12 Мэв

В случае близко расположенных уровней не удается разрешить группы протонов, рассеянных с возбуждением этих уровней. Однако в ряде случаев оказывается возможным определить основной вклад в рассматриваемое сечение. Так, сравнение с работой [27], в которой измерение неупругого рассеяния на ядре ^{148}Sm было выполнено при одном угле с помощью магнитного спектрографа с высоким разрешением, показывает, что из уровней 1162 кэв 3^- и 1181 кэв 4^+ ^{148}Sm возбуждается уровень 3^- , из уровней 1454 кэв и 1465 1^- — возбуждается 1^- .

В литературе отсутствуют данные об экспериментах по неупругому рассеянию протонов на ядре ^{154}Sm , выполненных с высоким разрешением. Можно предположить, однако, что механизм неупругого рассеяния протонов близок к механизму неупругого рассеяния дейтронов, и провести качественное сравнение с результатами работы [15] по неупругому рассеянию дейтронов на ядрах Sm. Оказывается, что дейтроны, так же как и протоны, с большей вероятностью возбуждают уровни 1162 3^- и 1465 1^- в ядре ^{148}Sm . Подтверждается вывод настоящей работы о слабом возбуждении уровней 1096 0^+ , 1372 4^+ в ядре ^{154}Sm . Из неразрешенных в настоящей работе уровней 1437 кэв 2^+ и 1474 1^- более интенсивно возбуждается первый уровень.

В табл. 6 не указаны сечения неупругого рассеяния с возбуждением уровня ядра ^{154}Sm при 920 кэв 1^- . Это сечение мало при больших углах рас-

Рис. 13. Дифференциальные сечения неупругого рассеяния протонов с возбуждением уровней вращательной полосы основного состояния ^{154}Sm

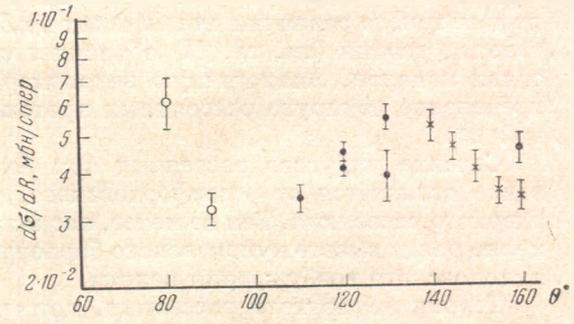
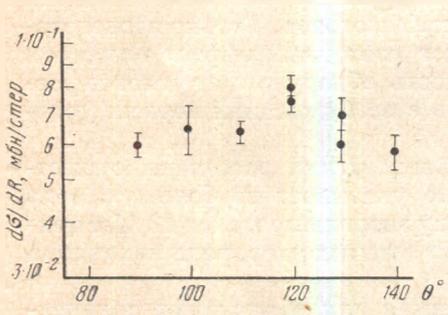
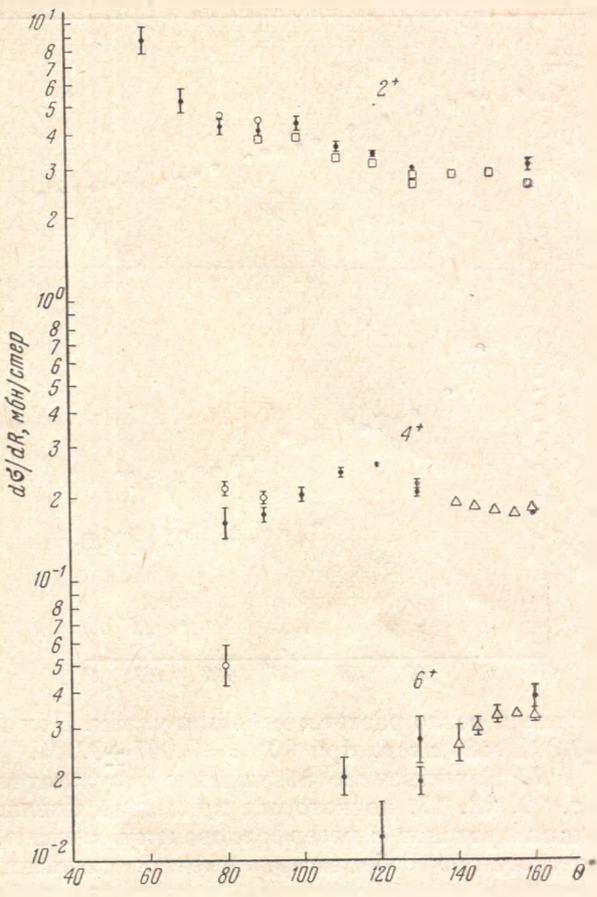


Рис. 14. Дифференциальное сечение неупругого рассеяния протонов с возбуждением уровня 1011 кэв 3- ядра ^{154}Sm

Рис. 15. Дифференциальное сечение неупругого рассеяния протонов с возбуждением уровня 1178 кэв 5- (2^+) ядра ^{154}Sm

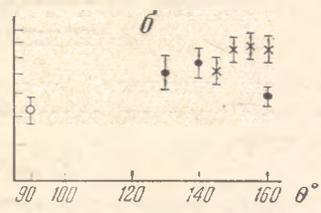
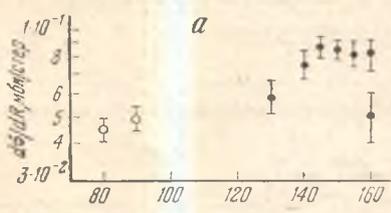


Рис. 16. Дифференциальные сечения неупругого рассеяния протонов
 а — с возбуждением уровня 1581 кэв 3- ядра ^{154}Sm ; б — с возбуждением уровня 2^+ 1437 кэв (с примесью 1- 1474 кэв) ядра ^{154}Sm

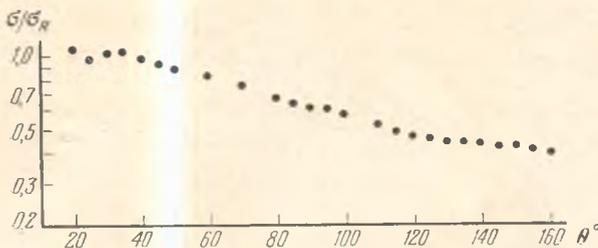


Рис. 17. Отношение дифференциального сечения упругого рассеяния протонов с энергией 12 Мэв к резерфордовскому сечению для ядра ^{174}Yb

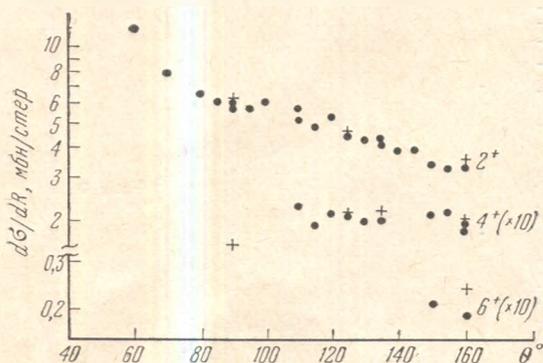


Рис. 18. Дифференциальные сечения неупругого рассеяния протонов с возбуждением уровней вращательной полосы основного состояния ядра ^{174}Yb

сеяния и резко растет к меньшим углам. При 130° оценка сечения $0,008 \pm \pm 0,004$ мбн/стер, при 90° $\sigma = 0,047 \pm 0,004$.

§ 7. Качественное обсуждение результатов измерений. Рассмотрение рис. 10, 12, 17, на которых приведено отношение сечений упругого рассеяния протонов к резерфордовскому сечению, обнаруживает интересную качественную особенность, а именно: осцилляции в угловом распределении проявляются наиболее ярко только для сферического ядра ^{148}Sm . Очевидно, что расчет упругого рассеяния по простой оптической модели не даст такого различия для близких по Z и A изотопов. Только последовательная теория (см. гл. II) объясняет этот изотопный эффект влиянием связи каналов. Аналогичную закономерность обнаруживает угловое распределение неупруго рассеянных протонов с возбуждением первых уровней 2^+ .

Сечение упругого рассеяния при больших углах рассеяния существенно отличается от резерфордовского, что указывает на большую роль ядерного рассеяния. Тем не менее, поскольку энергия протонов 12 Мэв примерно равна высоте кулоновского барьера изучаемых ядер, роль механизма кулоновского возбуждения велика.

Теория неупругого рассеяния, применяемая для объяснения полученных результатов, должна учитывать ядерные и кулоновские эффекты и структуру возбуждаемых состояний ядер.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ НУКЛОНОВ ТЯЖЕЛЫМИ ЯДРАМИ

§ 1. Система уравнений неупругого рассеяния. Представим полный гамильтониан H системы, состоящей из ядра и взаимодействующего с ним нуклона, в виде

$$H = H_T + T + V, \quad (1)$$

где H_T — гамильтониан ядра мишени, T — оператор кинетической энергии нуклона, V — оператор взаимодействия нуклона и ядра мишени.

Волновая функция Ψ системы удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$(H_T + T + V)\Psi = E\Psi. \quad (2)$$

Волновые функции различных состояний ядра мишени χ_{IM} со спином I и проекцией M удовлетворяют уравнению

$$H_T \chi_{IM} = \varepsilon \chi_{IM}. \quad (3)$$

Волновую функцию Ψ можно представить в виде разложения по полной системе волновых функций \mathcal{Y}_{Ij}^{JN} различных каналов неупругого рассеяния с полным моментом J , N , соответствующих определенным состояниям ядра мишени, орбитальным моментам нуклона l и полному моменту нуклона $j=l+s$.

$$\Psi = \sum_{n'I'l'j'J} f_{n'I'l'j'J}^{JN}(r) \mathcal{Y}_{I'l'j'J}^{JN}, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{Y}_{Ijl}^{JN} = \sum_{m_j M} (IMjm_j | JN) i^l \Phi_{Ijm_j} \chi_{IM}; \quad (5)$$

$$\Phi_{Ijm_j} = \sum_{m_l m_s} (lsm_l m_s | jm_j) i^l Y_l^{m_l} \chi_{sm_s}; \quad (6)$$

χ_{sm_s} — спиновые волновые функции нуклона; n' — номер канала.

Подставляя (4) в уравнение (2), умножая слева на \mathcal{Y}_{Ijl}^{JN} и производя интегрирование по всем координатам, кроме радиальной r , получим систему связанных уравнений относительно радиальных функций $f_{n'Ijl}^{JN}(r)$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + (E - \varepsilon_n) \right] f_{n'Ijl}^{JN}(r) = \\ = \sum_{n'I'j'l'} \langle \mathcal{Y}_{Ijl}^{JN} | V | \mathcal{Y}_{I'j'l'}^{JN} \rangle f_{n'I'j'l'}^{JN}(r), \quad (7)$$

где μ — приведенная масса; ε_n , E , $(E - \varepsilon_n)$ — энергии состояния ядра мишени, налетающего и вылетающего нуклона соответственно.

Если возможно выделение диагональной части оператора взаимодействия, уравнения (7) принимают вид

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - V_{\text{диаг}} + (E - \varepsilon_n) \right] f_{n'Ijl}^{JN}(r) = \\ = \sum_{n'I'j'l'} V_{Ijl, I'j'l'}^J f_{n'I'j'l'}^{JN}(r), \quad (8)$$

где

$$V = V_{\text{диаг}} + V_{\text{св}} \quad (9)$$

($V_{\text{св}}$ — оператор связи каналов),

$$V_{Ijl, I'j'l'}^J = \langle \mathcal{Y}_{Ijl}^{JN} | V_{\text{св}} | \mathcal{Y}_{I'j'l'}^{JN} \rangle. \quad (10)$$

Для решения конкретной задачи неупругого рассеяния мы ищем такие решения уравнений (8), которые давали бы сходящиеся волны лишь во входном канале α и только выходящие во всех остальных $n \neq \alpha$. Полная волновая функция Ψ^+ должна иметь следующий асимптотический вид:

$$\Psi^+ \sim \chi_{I\alpha M\alpha} \chi_{sm_s} e^{ik_\alpha r_\alpha} - \frac{i\mu}{2\pi\hbar^2} \sum_n A_{\alpha n}^J(k_\alpha, k_n) \chi_{I\alpha M\alpha} \chi_{s'm'_s} \frac{e^{ik_n r_n}}{r_n}. \quad (11)$$

Амплитуду рассеяния можно выразить через матрицу рассеяния S :

$$A_{\alpha n} \sim \sum_{l_\alpha j_\alpha l_n j_n} (l_\alpha m_\alpha | j m_\alpha) (j I_\alpha m_\alpha M_\alpha | J N) (j_n I_n m_j n M_n | J N) \times \\ \times (l_n s' m'_n | j_n m_j n) Y_{l_n}^{m_n}(\theta, \varphi) (\delta_{m_\alpha m'_\alpha} \delta_{M_\alpha M_n} - S_{l_\alpha j_\alpha l_n j_n}^J), \quad (12)$$

где

$$E = \varepsilon_\alpha + \frac{\hbar^2 k_\alpha^2}{2\mu} = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2\mu}.$$

Эффективное сечение неупругого рассеяния с возбуждением состояния n ядра мишени имеет вид

$$\frac{ds_{\alpha n}}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \cdot \frac{k_n}{k_\alpha} \cdot \frac{1}{(2s+1)(2I_\alpha+1)} \sum_{m_\alpha M_\alpha m'_\alpha M_n} |A_{\alpha n}^J|^2. \quad (13)$$

Далее рассматриваются различные методы расчета амплитуды неупругого рассеяния.

§ 2. Метод расчета с учетом только одного канала неупругого рассеяния. При проведении экспериментов по изучению неупругого рассеяния часто только один канал неупругого рассеяния β является существенным. При этом сечение неупругого рассеяния оказывается весьма малым по сравнению с сечением упругого рассеяния. В этом случае волновую функцию Ψ можно считать состоящей в основном из части, соответствующей только входному каналу упругого рассеяния. Это предположение в области вне действия ядерных сил не вызывает сомнения. В силу необходимости интегрирования по всему пространству принимается следующий вид волновой функции при любых r :

$$\Psi \approx \sum_{l_j j} f_{\alpha l_\alpha j l}^{JN}(r) \mathcal{Y}_{l_\alpha j l}^{JN}. \quad (14)$$

Система связанных уравнений значительно упрощается:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l_\alpha(l_\alpha+1)}{r^2} \right) - V_{\alpha\alpha} + (E - \varepsilon_\alpha) \right] f_{\alpha l_\alpha j_\alpha l_\alpha}^{JN}(r) = 0; \quad (15)$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l_\beta(l_\beta+1)}{r^2} \right) - V_{\beta\beta} + (E - \varepsilon_\beta) \right] f_{\beta l_\beta j_\beta l_\beta}^{JN} = \\ = \langle \mathcal{Y}_{l_\beta j_\beta l_\beta}^{JN} | V_{\text{св}} | \Psi \rangle \approx \sum_{l_\alpha j_\alpha} V_{l_\beta j_\beta l_\beta, l_\alpha j_\alpha l_\alpha}^J f_{\alpha l_\alpha j_\alpha l_\alpha}^{JN}, \quad (16)$$

где через $V_{\alpha\alpha}$ и $V_{\beta\beta}$ обозначены соответствующие диагональные элементы взаимодействия в каналах α и β .

Уравнение (15) соответствует обычному уравнению оптической модели для отыскания искаженных волн. Соответствующее уравнение в канале β имеет вид

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{l_\beta(l_\beta+1)}{r^2} \right) - V_{\beta\beta} + (E - \varepsilon_\beta) \right] g_{\beta l_\beta j_\beta l_\beta}^{JN} = 0. \quad (17)$$

Амплитуда неупругого рассеяния определяется следующим выражением:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{JN l_\beta j_\beta} \langle \mathcal{Y}_{l_\beta j_\beta l_\beta}^{JN} g_{\beta l_\beta j_\beta l_\beta}^{JN} | V_{\text{св}} | \Psi \rangle. \quad (18)$$

Учитывая приближение (14), получим

$$A_{\alpha\beta} \approx \sum_{JN l_\beta j_\beta l_\alpha} \int g_{\beta l_\beta j_\beta l_\beta}^{JN} V_{l_\beta j_\beta l_\beta, l_\alpha j_\alpha l_\alpha}^J f_{\alpha l_\alpha j_\alpha l_\alpha}^{JN} r^2 dr. \quad (19)$$

Последнее соотношение совпадает с амплитудой DWBA, полученной в первом порядке борновского приближения с искаженными волнами [28].

Таким образом, основные предположения этого метода состоят в преобладании упругого процесса над неупругим, использовании искаженных волн f_{α}^{JN} при любых значениях координат, отсутствии связи выбранного канала неупругого рассеяния с другими каналами неупругого рассеяния, т. е. малость соответствующих матричных элементов (10).

§ 3. Метод расчета по теории возмущений. Если имеется несколько каналов неупругого рассеяния, сильно связанных между собой, метод, рассмотренный в предыдущем разделе, неприменим. Существенную роль в выражениях для амплитуд должны играть матричные элементы, ответственные за связь данного канала неупругого рассеяния с другими каналами.

Система дифференциальных уравнений (8) может быть приведена к системе интегральных уравнений. Для этого введем функции Грина для каждого из каналов неупругого рассеяния

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_n^2} \cdot \frac{d}{dr_n} r_n^2 \frac{d}{dr_n} - \frac{l_n(l_n+1)}{r_n^2} \right) - V_n + (E - \varepsilon_n) \right] G(r_n, r'_n) = \delta(r_n - r'_n). \quad (20)$$

Тогда система уравнений приобретает вид (для наглядности опустим спиновые индексы)

$$f_n(r) = \int dr'_n G(r_n, r'_n) \sum_k \langle \mathcal{Y}_n | V_{cn} | \mathcal{Y}_k \rangle f_k(r'). \quad (21)$$

Решение этой системы уравнений определяет полную функцию Ψ с учетом разложения (4). Амплитуда рассеяния может быть найдена по соотношению (18)

$$A_{\alpha\gamma} = \langle \mathcal{Y}_\gamma g_\gamma | V_{cn} | \Psi \rangle.$$

Для получения приближенного решения можно воспользоваться, как и в § 2, малой величиной неупругого рассеяния по сравнению с упругим. Тогда для определения функции входного канала можно воспользоваться уравнением оптической модели (15).

Если, кроме того, сечение неупругого рассеяния с возбуждением уровня γ может считаться малым по сравнению с сечением для возбуждения уровня β , в сумме (21) для $f_\beta(r)$ можно пренебречь $V_{\beta\gamma} f_\gamma$ по сравнению с $V_{\beta\alpha} f_\alpha$.

В частном случае только трех каналов (упругого α и неупругих β и γ) амплитуда неупругого рассеяния для канала γ имеет вид

$$A_{\alpha\gamma} \approx \langle \mathcal{Y}_\gamma g_\gamma | V_{cn} | (f_\alpha \mathcal{Y}_\alpha + \int \mathcal{Y}_\beta G_\beta | V_{cn} | f_\alpha \mathcal{Y}_\alpha dr') \rangle. \quad (22)$$

Первый член суммы в (22) дает уже встречавшуюся амплитуду рассеяния первого порядка (19) для канала γ . Второй член дает амплитуду второго порядка

$$A_{\alpha\gamma}^{(II)} = \sum_{JN, j_\gamma, l_\gamma, j_\alpha, l_\alpha, l', j', l'} \int (r^2 dr) g_{\gamma l_\gamma j_\gamma l_\gamma}^{JN} V_{l_\gamma j_\gamma l_\gamma, l' j' l'} \int G_{l' l'}(r, r') \times \\ \times V_{l' j' l', l_\alpha j_\alpha l_\alpha}^{JN} (r')^2 dr'. \quad (23)$$

Соотношение между матричными элементами вида $V_{\gamma\alpha}$, ответственными за прямое возбуждение, и $V_{\gamma\beta}$, $V_{\beta\alpha}$, ответственными за многократное возбуждение, может привести к тому, что сечение второго порядка превысит сечение первого порядка.

С помощью соотношения (23) можно рассчитать также амплитуду второго порядка $A_{\alpha\alpha}^{(II)}$, дающую вклад в сечение упругого рассеяния при виртуальном возбуждении промежуточного состояния β .

В том случае, когда сечение неупругого рассеяния сравнимо по величине с сечением упругого рассеяния, метод, рассмотренный в этом разделе, неприменим и должен быть заменен точным решением системы связанных уравнений [7, 8].

§ 4. Расчет упругого и неупругого рассеяния протонов на деформированных ядрах. Для описания результатов проведенного эксперимента по рассеянию протонов на ядрах Sm и Yb был применен метод расчета, рассмотренный в § 3. При этом сечения упругого рассеяния и неупругого с возбуждением состояния 4^+ были рассчитаны с учетом эффектов второго порядка. Как указывается в работе [29], в случае рассеяния на тяжелых деформированных ядрах роль спин-орбитальных сил мала. Поэтому расчеты могли быть произведены без учета спин-орбитальной зависимости потенциала. Тогда можно не учитывать в формулах спин протона, и функция Грина принимает вид [30]

$$G_{I, l}(r, r') = \frac{2\mu k_n}{\hbar^2 i} f_l(k_n r_<) y_l(k_n r_>), \quad (24)$$

где $r_<$ и $r_>$ — соответственно меньшее и большее из r и r' , f_l и y_l — регулярное и нерегулярное решения уравнений (7) в пренебрежении связью, т. е. уравнений (17).

Амплитуды рассеяния первого и второго порядков принимают вид

$$A_{\alpha\gamma}^{(I)} = (4\pi)^{3/2} \sum_{Jl_{\alpha}l_{\gamma}m_{\gamma}} e^{i(\sigma_{l_{\alpha}} + \sigma_{l_{\gamma}})} Y_{l_{\gamma}}^{m_{\gamma}}(\theta) \sqrt{2l_{\alpha} + 1} (I_{\gamma} M_{\gamma} l_{\gamma} m_{\gamma} | J M_{\alpha}) \times \\ \times (I_{\alpha} M_{\alpha} l_{\alpha} 0 | J M_{\alpha}) \int_0^{\infty} r^2 dr f_{l_{\gamma}} V_{I_{\gamma} l_{\gamma}, I_{\alpha} l_{\alpha}}^J f_{l_{\alpha}} \quad (25)$$

$$A_{\alpha\gamma}^{(II)} = (4\pi)^{3/2} \sum_{Jl'_{\alpha}l'_{\gamma}m_{\gamma}l'} e^{i(\sigma_{l'_{\alpha}} + \sigma_{l'_{\gamma}})} Y_{l'_{\gamma}}^{m_{\gamma}}(\theta) \sqrt{2l'_{\alpha} + 1} (I_{\gamma} M_{\gamma} l'_{\gamma} m_{\gamma} | J M_{\alpha}) \times \\ \times (I_{\alpha} M_{\alpha} l'_{\alpha} 0 | J M_{\alpha}) \left[\int_0^{\infty} r^2 dr f_{l'_{\gamma}} V_{I_{\gamma} l'_{\gamma}, I' l'}^J y_{l'} \int_0^r f_{l'} V_{I' l', I_{\alpha} l'_{\alpha}}^J f_{l'_{\alpha}} (r')^2 dr' + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} r^2 dr f_{l'_{\gamma}} V_{I_{\gamma} l'_{\gamma}, I' l'}^J y_{l'} \int_r^{\infty} y_{l'} V_{I' l', I_{\alpha} l'_{\alpha}}^J f_{l'_{\alpha}} (r')^2 dr' \right], \quad (26)$$

где

$$\sigma_{l_i} = \arg [\Gamma(l_i + 1 + i\eta_i)], \quad (27)$$

$$\eta_i = \frac{ZZ'e^2\mu}{\hbar^2 k_i}. \quad (28)$$

Приведенные выше выражения для амплитуд были использованы для расчета сечений упругого рассеяния протонов с учетом амплитуды второго порядка, определяющей виртуальное рассеяние через уровень 2^+ , и сечений неупругого рассеяния с возбуждением уровня 4^+ . В последнем случае амплитуда первого порядка соответствует прямому переходу $0^+ \rightarrow 4^+$, а амплитуда второго порядка — двукратному возбуждению через уровень 2^+ .

Расчеты велись в адиабатическом приближении [7], которое справедливо для возбуждения низколежащих состояний при достаточно высокой энергии падающих частиц.

§ 5. Выбор потенциала взаимодействия. Во всех расчетах был использован несферический потенциал с радиальной зависимостью в форме Саксона—Вудса [31]. Введение такого потенциала представляет собой

простейшую возможность феноменологического описания экспериментов по упругому и неупругому рассеянию на ядрах с ярко выраженными коллективными свойствами. Учитывалось только поверхностное поглощение. Действительно, в ранних работах [5, 8] указано, что данные по рассеянию нуклонов с энергией до 30 Мэв могут быть описаны без введения объемного поглощения

$$V(r, \theta, \varphi) = -\frac{V}{1 + \exp[(r-R)/a]} - 4i \frac{W \exp[(r-R_1)/a_1]}{(1 + \exp[(r-R_1)/a_1])^2} + V_{\text{кв.}} \quad (29)$$

Здесь V , W — глубина действительной и мнимой части потенциала; R , R_1 , a , a_1 — радиус и диффузность; $R = r_0 A^{1/3}$; $R_1 = r_{01} A^{1/3}$.

Ограничиваясь рассмотрением только вращательных состояний и следуя модели Бора и Моттельсона [32], запишем уравнение поверхности ядра с постоянной деформацией при отсутствии неаксиальности

$$R(\theta', \varphi') = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda} Y_{\lambda}^0(\theta', \varphi') \right], \quad (30)$$

где θ' , φ' — полярный и азимутальный углы точки поверхности ядра в системе координат, связанной с ядром.

Для конкретных данных настоящей работы

$$R = R_0 \left[1 + \beta_2 Y_2^0 + \beta_4 Y_4^0 - \frac{1}{4\pi} (\beta_2^2 + \beta_4^2) \right], \quad (31)$$

где β_2 и β_4 — параметры квадрупольной и гексадекапольной деформации. Последний член в (31) возникает из-за необходимости сохранения объема.

В неподвижной системе координат поверхность ядра определяется следующим выражением:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda} \sum_{q} D_{q0}^{\lambda*}(\Omega_R) Y_{\lambda}^q(\theta, \varphi) \right], \quad (32)$$

где Ω_R определяет ориентацию ядра.

Параметры разложения потенциала (29) по мультиполям могут быть найдены с точностью до β_2^2 путем разложения в ряд Тейлора или интегрированием

$$V_{\lambda} = 4\pi \int_0^1 V(r - R(\theta')) Y_{\lambda}^0(\theta') d(\cos \theta'). \quad (33)$$

Для оценки матричных элементов $V_{I'I', II}^{J(\lambda)}$ используем следующую форму волновой функции для вращательных состояний основной полосы:

$$\chi_{IK} = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} i^I D_{K0}^I(\Omega_R), \quad (34)$$

где

$$\hat{I} = \sqrt{2I+1}.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{Y}_{II}^{JN} = \sum_m (IMlm | JN) i^I Y_I^m \chi_{IM}, \quad (35)$$

$$V = \sum_{\lambda} V_{\lambda} Y_{\lambda}^0(\theta', \varphi') = \sum_{\lambda} V_{\lambda} \sum_{q} D_{q0}^{\lambda*}(\Omega_R) Y_{\lambda}^q(\theta, \varphi), \quad (36)$$

получим

$$V_{l'l', ll}^{j'j} = \langle Y_{l'l'}^j | V_\lambda | Y_{ll}^j \rangle = (-1)^{j-j'} i^{l-l'} i^{l'-l} \langle l0l'0 | \lambda 0 \rangle \times \\ \times W(l'l'l'; J\lambda) \langle l0l'0 | \lambda 0 \rangle \frac{l'l'}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} V_\lambda. \quad (37)$$

Для расчета вклада кулоновского взаимодействия при достаточно больших энергиях ядро может быть представлено в виде заряженной деформированной сферы с резким краем. Выражение для $V_{кул}$ в этом случае приводит Тамура [8] с точностью до второго порядка по квадрупольной деформации. Однако при энергиях около кулоновского барьера, как показали наши расчеты, необходимо учитывать размытость границы ядра. В расчетах по методу, рассмотренному в § 4, размытость распределения заряда ядра учитывалась приближенно, согласно работе [33]. Детали численного интегрирования с использованием ЭВМ рассмотрены в статье [9].

ГЛАВА III

СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

§ 1. Результаты расчета с учетом эффектов второго порядка. Поскольку ядра ^{148}Sm , ^{154}Sm , ^{174}Yb мало отличаются по значениям Z , A , параметры оптического потенциала в формуле (29) должны мало различаться между собой. В то же время сечения упругого рассеяния протонов на этих ядрах могут различаться вследствие слабой связи с каналом 2^+ в случае сферического ядра ^{148}Sm и сильной связи в случае деформированных ядер ^{154}Sm и ^{174}Yb .

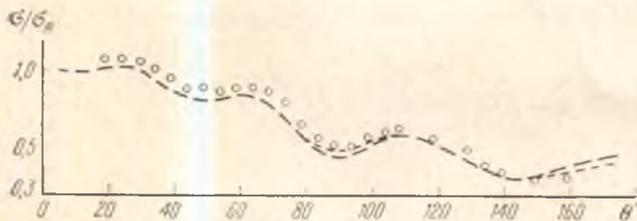


Рис. 19. Сравнение измеренных отношений сечения упругого рассеяния протонов на ^{148}Sm к резерфордовскому сечению с расчетом по оптической модели с набором параметров (38) (штриховая кривая) и с учетом спин-орбитального члена в потенциале (пунктирная)

На рис. 19 приведено сравнение расчета по обычной оптической модели упругого рассеяния на сферическом ядре с экспериментальными данными. Параметры потенциала оказались близки к параметрам, найденным в работе [5]:

$$V = 54 \text{ Мэв}, \quad W = 9,75 \text{ Мэв}, \quad r_0 = 1,25 \text{ фм}, \\ r_{01} = 1,25 \text{ фм}; \quad a = 0,65 \text{ фм}, \quad a_1 = 0,76 \text{ фм}. \quad (38)$$

Расчет был проведен также с включением спин-орбитального члена в потенциал ($V_{с.о.} = 7,5 \text{ Мэв}$). Как видно из рис. 19, отличие от расчета, сделанного в пренебрежении спин-орбитальными силами, незначительно.

На рис. 20 с экспериментом сравниваются расчеты с учетом эффектов второго порядка. Дополнительным параметром является параметр квадрупольной деформации. Наилучшее согласие для упругого рассеяния на ^{154}Sm дает оптический потенциал с теми же параметрами, что и (38), за исключением

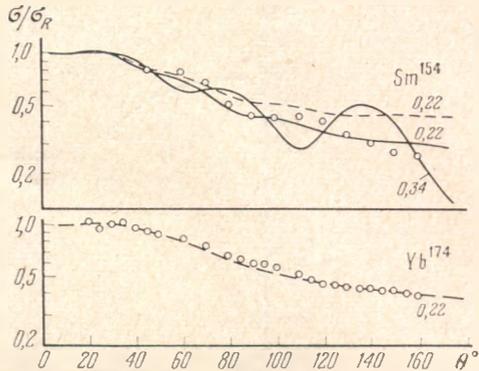
$$a = 0,75 \text{ фм}, \quad (39)$$

для упругого рассеяния протонов на ^{174}Yb

$$a = 0,70 \text{ фм}. \quad (40)$$

Рис. 20. То же, что на рис. 19, для ^{154}Sm и ^{174}Yb

Штриховая кривая для ^{154}Sm рассчитана с набором параметров (38), сплошные — (39) для разных параметров, штриховая для ^{174}Yb — (40). Цифры у кривых — величины β_2



Параметр $\beta_2=0,22$ для ^{154}Sm и ^{174}Yb , т. е. существенно меньше значений, полученных из данных по кулоновскому возбуждению [34], равных соответственно 0,336 и 0,308.

Расчет сечения неупругого рассеяния с возбуждением вращательного уровня 4^+ для ^{154}Sm и ^{174}Yb был произведен с параметрами оптической модели соответственно (39) и (40), и $\beta_2=0,18$, и различными параметрами β_4 , указанными на кривых рис. 21, 22.

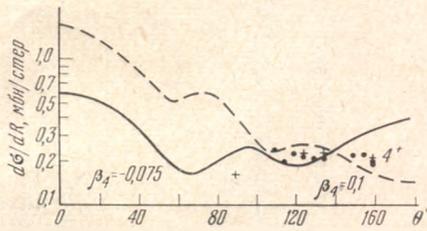
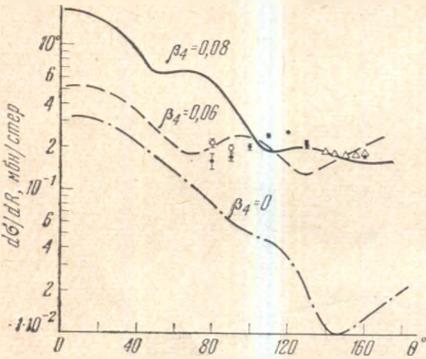


Рис. 21. Сравнение с экспериментальными данными расчета сечения неупругого рассеяния протонов ядром ^{154}Sm с возбуждением первого уровня 4^+

Рис. 22. То же, что на рис. 21, для ^{174}Yb

Как видно, данные не позволяют сделать однозначный выбор параметров β_4 . Однако сравнение с расчетом неупругого рассеяния альфа-частиц на ядрах редкоземельной области ядер [35] позволяет выбрать $\beta_4=0,08$ для ^{154}Sm и $\beta_4=-0,075$ для ^{174}Yb . В работе [35] приведены соответственно значения 0,054; $-0,048$ (при $r_0=1,2$ фм).

Итак, рассмотренный в § 3, 4 гл. II метод расчета с учетом существенных эффектов второго порядка позволяет объяснить экспериментальные данные, в частности уменьшение осцилляций в сечении упругого рассеяния при переходе от сферического к деформированному ядру. Не следует придавать большого значения наблюдающемуся отличию параметров β_2 от значений, полученных из кулоновского возбуждения. Как указано в работе [33], учет размытости заряда ядра приводит к уменьшению последних. Однако точность определения параметров β_2 и β_4 по этому методу невелика, что можно объяснить сделанными приближениями: ограничивалось число каналов, не учитывались распады уровней 2^+ и 4^+ . Метод дает большую точность в случае меньшей связи, не такой сильной, как для сильно деформированных ядер.

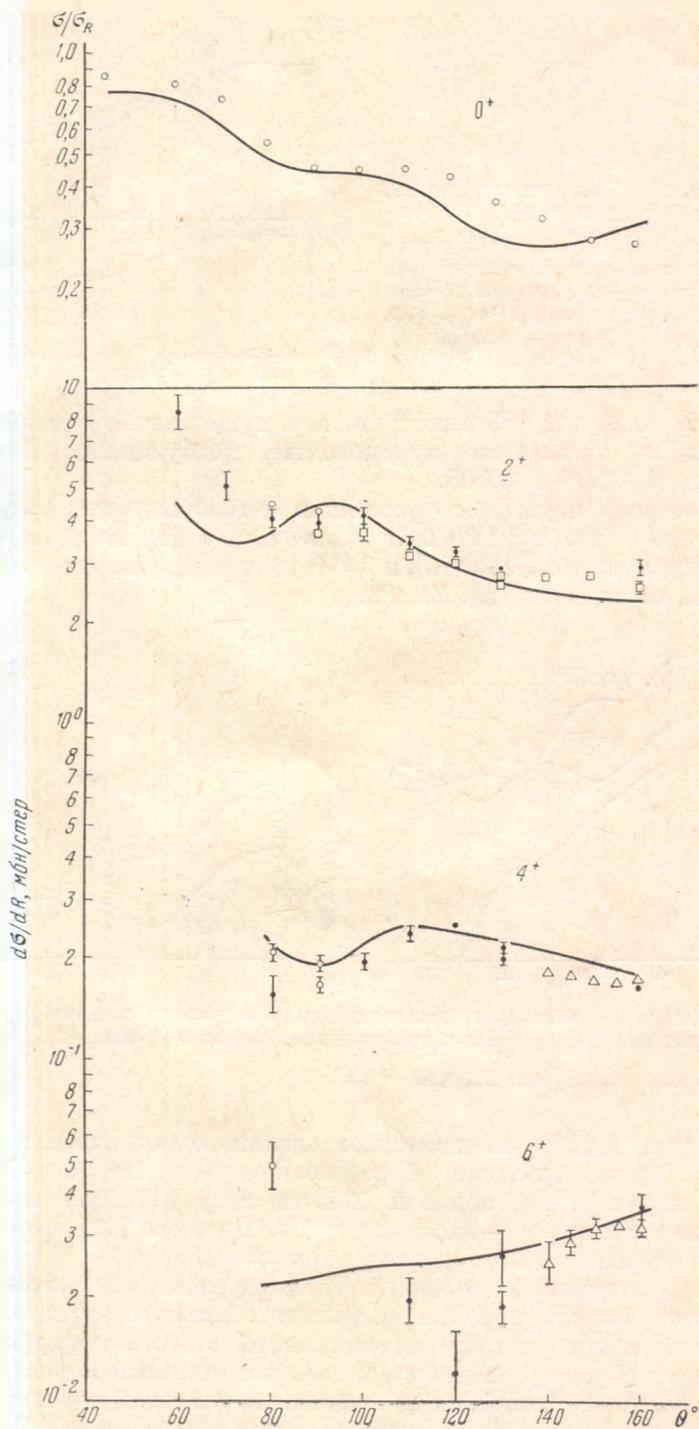


Рис. 23. Сравнение с экспериментальными данными результата расчета по методу связанных каналов для рассеяния протонов ядром ^{154}Sm при 12 Мэв

Тем не менее этот метод позволяет проводить расчет более быстро, чем на ЭВМ среднего класса, что позволяет получать параметры, в первом приближении описывающие экспериментальные данные. В дальнейшем более точный расчет по методу связанных каналов дает возможность как увеличить точность, так и рассчитать сечения рассеяния с возбуждением большего числа уровней.

§ 2. Результаты расчета по методу связанных каналов. В качестве примера расчета по методу связанных каналов на рис. 23 проводится сравнение с экспериментальными данными для упругого и неупругого рассеяния протонов на ^{154}Sm при энергии 12 Мэв. Отыскание наилучших параметров проводилось по методу наименьших квадратов [36]. Оптический потенциал задавался в форме Вудса—Саксона (29) без учета спин-орбитальной зависимости. Распределение заряда в ядре принималось в виде функции Ферми

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R_c)/a_c]}, \quad (41)$$

где $R_c = r_0 A^{1/3}$; a_c — диффузность границы.

Параметры радиуса потенциала были взяты близкими к данным в работе [4]. Полученный набор параметров приводится ниже:

$$\begin{aligned} V = 60 \text{ Мэв}, & \quad W = 6,44 \text{ Мэв}, & \quad r_0 = 1,16 \text{ фм}, \\ r_{01} = 1,40 \text{ фм}, & \quad r_0 = 1,26 \text{ фм}, & \quad a = 0,78 \text{ фм}, \\ a_1 = 0,86 \text{ фм}, & \quad a_0 = 0,78 \text{ фм}, & \quad \beta_2 = 0,26, \quad \beta_4 = 0,061. \end{aligned}$$

Параметры деформации оказались близкими к полученным в работе [35] из рассеяния альфа-частиц с энергией 50 Мэв ядрами ^{154}Sm .

В заключение следует отметить, что проведение программы расчета сечений упругого и неупругого рассеяния протонов и других частиц атомными ядрами позволит получить параметры, которые могут быть затем использованы в описании реакций, а также представляют самостоятельный интерес для описания свойств ядра с точки зрения коллективных моделей.

Автор выражает благодарность И. М. Франку и И. Я. Бариту за интерес к работе, Г. Шульцу, Х. Вибике за полезные обсуждения и помощь в проведении некоторых расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Lieber, C. A. Whitten. Phys. Rev., 132, 2582 (1963).
2. А. Б. Курепин, Б. Элбек, Б. Мадсен. Изв. АН СССР, серия физ., 31, 195 (1967).
3. P. Stoler, M. Slagowitz, W. Makofske, T. Kruse. Phys. Rev., 155, 1334 (1967).
4. F. D. Becchetti, G. W. Greenlees. Phys. Rev., 182, 1190 (1969).
5. F. G. Perey. Phys. Rev., 131, 745 (1963).
6. С. М. Перей, Ф. Г. Перей, Ж. К. Диченс. Phys. Rev., 175, 1460 (1968).
7. С. И. Дроздов. Ядерная физика, 2, 810 (1965).
8. T. Tamura. Rev. Mod. Phys., 37, 679 (1965).
9. J. M. Bang, K. Y. Chan, A. B. Kurepin, O. Saethre. Nucl. Phys., A122, 34 (1968).
10. J. de Boer, G. Goldring, H. Winkler. Phys. Rev., 134, 1032 (1964).
11. B. Elbek, M. C. Olesen, O. Skilbreid. Nucl. Phys., 19, 523 (1960).
12. D. H. Wilkinson. Comments on Nucl. Particle Phys., 1, 80 (1967).
13. IEEE Trans. on Nucl. Sci., 13, N 4 (1966).
14. И. Я. Барит, Г. А. Васильев, В. А. Гладышев, Л. Н. Кацауров и др. Препринт ФИАН, 15 (1969).
15. B. Elbek. Recent progress in nuclear physics with tandems. Heidelberg, 1966.
16. Ю. Г. Басаргин. ЖТФ, 38, 2091 (1968).
17. B. Elbek, M. Kregar, P. Vedelsby. Nucl. Phys., 86, 385 (1966).
18. G. Dearnaley, A. G. Hardacre, B. D. Rogers. AERE, R5813 (1968).
19. IEEE Trans. on Nucl. Sci., 15, N 3, 337 (1968).

20. *M. Q. Makino, C. N. Wadell, R. M. Eisberg.* Nucl. Instrum. and Methods, **60**, 109 (1968).
21. *L. Westgaard, S. Bjørnholm.* Nucl. Instrum. and Methods, **42**, 77 (1966).
22. *J. H. E. Mattauch, W. Thiele, A. H. Wapstra.* Nucl. Phys., **67**, 1 (1965).
23. *B. L. Cohen.* Rev. Scient. Instrum., **33**, 85 (1962).
24. *D. Demirlioglu, W. Whaling.* Proton stopping cross sections. California Inst. Technol. Report, 1962.
25. *E. Veje, B. Elbek, B. Herskind, M. C. Olesen.* Nucl. Phys., *A* **109**, 489 (1968).
26. *Б. С. Дженелов, Л. К. Пекер, В. О. Сергеев.* Схемы распада радиоактивных ядер $A \geq 100$. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
27. *R. A. Kenefick, R. K. Sheline.* Phys. Rev., **133**, 25 (1964).
28. *R. H. Bassel, R. M. Drisko, G. R. Satchler.* ORNL-3240 (1962).
29. *R. C. Barrett.* Phys. Rev. Letters, **14**, 115 (1965).
30. *W. Tobocman.* Theory of direct nuclear reactions. Oxford, 1961.
31. *R. D. Woods, D. S. Saxon.* Phys. Rev., **95**, 577 (1954).
32. *A. Bohr, B. Mottelson.* Kgl. danske vid. selskab. Mat-fys. medd., **27**, N 16 (1953).
33. *J. Bang, O. Saethre.* Phys. Letters, **28B**, 99 (1968).
34. *B. Elbek.* Determination of nuclear transition probabilities by Coulomb excitation. Copenhagen, Munksgaard, 1963.
35. *D. L. Hendrie, N. K. Glendenning, B. G. Harvey, O. N. Jarvis, H. H. Duhm, J. Sandinos, J. Mahoney.* Phys. Letters, **26B**, 127 (1968).
36. *А. Б. Куренин, Г. Шульц, Х. И. Вибике.* Препринт ОИЯИ, Р4-6039. Дубна, 1971.

Поступила в редакцию
29 января 1971 г.

В. И. БЕЛЯК

**НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ
СУММИРОВАНИЯ АБЕЛЯ—ПЛАНА И ПРИМЕНЕНИЕ ЕГО
ДЛЯ ОПИСАНИЯ РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ**

1. Формула Абеля—Плана в применении к сумме $\sum_{n=M}^N f(n)$ или ряду, соответствующему $N = \infty$, обычно формулируется (см., например, [1, 2]) для функций $f(z)$, голоморфных в полосе суммирования: $M - \theta_M \leq \operatorname{Re} z \leq N + \theta_N$ ($0 < \theta_{M,N} < 1$). Однако эта формула легко обобщается на случай суммирования функций мероморфных в соответствующей полосе суммирования. При этом возникает дополнительный член, обозначаемый ниже символом R . На это обобщение (для функций, имеющих конечное число полюсов в полосе суммирования) было указано еще Линделёфом [1]. Однако дополнительный член R не исследовался, а при применении разложений Эйлера—Маклорена к рассматриваемым суммам в неявном виде включался в остаточный член (либо в постоянную Эйлера—Маклорена). При рассмотрении некоторых физических задач такой подход может привести к потере ряда интересных физических следствий.

Например, амплитуда рассеяния частиц на нулевой угол, мнимая часть которой определяет полное сечение рассеяния частиц, представляет собой в квазиклассическом приближении медленно сходящийся ряд

$\sum_{l=0}^{\infty} f_E(l) \equiv F_E$, где $f_E(l)$ — амплитуда рассеяния частиц с моментом l и энергией E ; причем $f_E(z)$, как функция комплексного переменного z , при некоторых E может иметь полюса $z_k(E)$, близко расположенные к числам суммирования l . В этом случае учет основного члена формулы Абеля—

Плана $\int_{\sigma} f_E(x) dx \equiv F_E$, дающего по существу сумму определенным обра-

зом усредненных членов исходного ряда, так же как и учет остальных членов «обычной» формулы Абеля—Плана, недостаточен. Необходимо непосредственно учитывать отдельные «аномально большие» («резонирующие») члены исходного ряда, для которых $|l - z_k(E)| \ll 1$. Такой учет приводит к части амплитуды рассеяния $F_E^{\text{рез}}$, зависимость которой от E носит резонансный характер, в то время как F_E плавно зависит от E . Поэтому учет $F_E^{\text{рез}}$ существен, даже если она много меньше F_E . На языке обобщенной формулы суммирования Абеля—Плана учет отдельных «резонирующих» членов исходного ряда осуществляется членом R .

В настоящей работе рассматривается обобщенная формула суммирования Абеля—Плана и дальнейшие ее модификации. Особое внимание уделено случаям, когда полюса суммируемой функции расположены вблизи чисел и границ суммирования. Затем обобщенная формула суммирования Абеля—Плана применяется для описания в квазиклассическом приближении резонансного рассеяния частиц.

2. Рассмотрим обобщенную формулу суммирования Абеля—Плана. Прежде всего запишем выражение суммы через контурные интегралы в удобном для дальнейшего рассмотрения виде.

Пусть $\Gamma_{\mu\nu}$ — замкнутый контур, пересекающий вещественную ось комплексной плоскости $z \equiv x + iy$ в точках $\mu \equiv M - \theta_M$, $\nu \equiv N + \theta_N$ ($0 < \theta_{N, M} < 1$, N и M — целые числа). Пусть функция $f(z)$ аналитична на контуре $\Gamma_{\mu\nu}$ и внутри него, за исключением конечного числа полюсов или существенно особых точек $z_k \equiv x_k + iy_k$, не лежащих на контуре $\Gamma_{\mu\nu}$ и вещественной оси. Тогда

$$\sum_{n=M}^N f(n) = I_{\mu\nu}(f) - \int_{\Gamma_{\mu\nu}} f(z) \Omega(z) dz + 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{res} [f(z) \Omega(z), z_k], \quad (1)$$

$$\Omega(z) \equiv \frac{i}{2} (\operatorname{ctg} \pi z + i \operatorname{sgny}), \quad \operatorname{sgny} \equiv \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0; \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

$$I_{\mu\nu}(f) = \int_{\mu}^{\nu} f(x) dx. \quad (2)$$

Если функция $f(z)$ имеет особые точки z_{k_0} , лежащие на вещественной оси внутри контура $\Gamma_{\mu\nu}$, но не равные целым числам n , т. е. $z_{k_0} = x_{k_0} \neq n$, $\mu < x_{k_0} < \nu$, то в соотношении (1) и в дальнейших соотношениях величины $\operatorname{res} [f(z) \Omega(z), z_{k_0}]$ следует понимать как $\operatorname{res} \left[f(z) \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \pi z, z_{k_0} \right]$, а для $I_{\mu\nu}(f)$ использовать выражение более общее, чем (2):

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(f) &= - \int_{\Gamma_{\mu\nu}^0} f(z) \frac{\operatorname{sgn} y}{2} dz = \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\mu+i\delta}^{\nu+i\delta} f(z) dz + \int_{\mu-i\delta}^{\nu-i\delta} f(z) dz \right] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mu}^{\nu} \frac{1}{2} [f_{z_{k_0}+i\delta}(x) + f_{z_{k_0}-i\delta}(x)] dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь контур $\Gamma_{\mu\nu}^0$ отличается от контура $\Gamma_{\mu\nu}$ тем, что содержит внутри себя только особые точки z_{k_0} , лежащие на вещественной оси; $f_{z_{k_0} \pm i\delta}(z)$ обозначает функцию $f(z) \equiv f_{z_{k_0}}(z)$, у которой особые точки z_{k_0} смещены с вещественной оси на $\pm i\delta$. Если z_{k_0} являются полюсами первого порядка,

то $I_{\mu\nu}(f) = \int_{\mu}^{\nu} f(x) dx$ (символ \int обозначает интеграл в смысле главного значения).

Отметим, что $\Omega(z)$ затухает с ростом $|y|$ как $\exp(-2\pi|y|)$, поэтому в определенных случаях вместо контура $\Gamma_{\mu\nu}$ можно использовать прямые $x = \mu$, ν , что и приводит к обобщенной теореме Абеля—Плана.

Теорема I. а) Пусть функция $f(z)$ аналитична в полосе $\mu \leq x \leq \nu$ ($z \equiv x + iy$, $\mu \equiv M - \theta_M$, $\nu \equiv N + \theta_N$, $0 < \theta_{N, M} < 1$, N и M — целые числа), за исключением произвольного числа полюсов или существенно особых точек $z_k \equiv x_k + iy_k$ ($x_k \neq \mu, \nu$; $z_k \neq n$, n — целые числа); б) существует последовательность $\tilde{y}_m \rightarrow \pm \infty$, $\tilde{y}_{m+1} > \tilde{y}_m$ такая, что $|\tilde{y}_m - y_k| > \rho > 0$ для всех k, m и равенство $\lim_{\tilde{y}_m \rightarrow \pm \infty} e^{-2\pi|\tilde{y}_m|} f(x + i\tilde{y}_m) = 0$ выполняется равномерно

при $\mu \leq x \leq \nu$; в) интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda + iy)| e^{-2\pi|y|} dy$ сходится при $\lambda = \mu, \nu$.

Тогда

$$\sum_{n=M}^N f(n) = I_{\mu\nu}(f) + P_{\mu\nu}(f) + R_{\mu\nu}(f), \tag{4}$$

$$P_{\mu\nu}(f) = P_{\mu}(f) - P_{\nu}(f), \quad P_{\lambda}(f) = \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} f(z) \Omega(z) dz;$$

$$R_{\mu\nu}(f) = 2\pi i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\bar{y}_m < y_k < \bar{y}_{m+1} \\ \mu < z_k < \nu}} \operatorname{res}[f(z) \Omega(z), z_k]. \tag{5}$$

Для величины $R_{\mu\nu}(f)$ в дальнейшем будет использоваться более простая запись

$$R_{\mu\nu}(f) = 2\pi i \sum_{\mu < z_k < \nu} \operatorname{res}[f(z) \Omega(z), z_k], \tag{5'}$$

которая, строго говоря, справедлива, если ряд (5') абсолютно сходится.

Условия б) и в) теоремы 1 выполняются, в частности, если

$$|f(x + iy)| \leq C e^{b|y|}, \quad b < 2\pi \tag{6}$$

(C — произвольная константа) на некоторой последовательности отрезков $\mu \leq x \leq \nu$, $y = \bar{y}_m \rightarrow \pm \infty$ ($|\bar{y}_m - y_k| > \rho > 0$) и на прямых $x = \mu, \nu$; или, практически, если соотношение (6) справедливо в области $\mu \leq x \leq \nu$, $|z - z_k| > \rho > 0$.

Для случая, когда число особых точек z_k конечно, можно упростить формулировку теоремы 1, а именно: в условии б) требовать выполнения соответствующего равенства по-прежнему равномерно относительно x , но при произвольном стремлении y к $\pm \infty$; условие в) отбросить. При этом соотношения (4)—(5') остаются справедливыми, но $P_{\mu\nu}(f)$, вообще говоря, следует брать в виде

$$P_{\mu\nu}(f) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} [f(\mu + z) \Omega(\mu + z) - f(\nu + z) \Omega(\nu + z)] dz.$$

Практически в формуле (4) и в последующих формулах наиболее удобно брать $\theta_{M, N} = 1/2$ либо переходить к предельному случаю, соответствующему $\theta_{M, N} = 0$. При этом выражения для $P_{\lambda}(f)$ ($\lambda = \mu, \nu$; $\lambda = l \pm \theta_l$, $l = M, N$) имеют наиболее простой вид

$$P_{\lambda=l\mp 1/2} = -i \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda + it) - f(\lambda - it)}{e^{2\pi t} + 1} dt = \sum_{n=1}^K \frac{(1 - 2^{1-2n}) B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(\lambda) + \rho_{\lambda}^{2K+1};$$

$$P_{l\mp 0} = \pm \frac{1}{2} f(l) + i \int_0^{\infty} \frac{f(l + it) - f(l - it)}{e^{2\pi t} - 1} dt =$$

$$= \pm \frac{1}{2} f(l) - \sum_{n=1}^K \frac{B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(l) + \rho_l^{2K+1}; \tag{7}$$

$$\rho_{\lambda}^m = i \int_0^{\infty} dt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi n t}}{(2\pi n)^m} \cdot \frac{d^m}{dt^m} [f(\lambda + it) e^{i2\pi n \lambda} - f(\lambda - it) e^{-i2\pi n \lambda}]$$

(B_{2n} — числа Бернулли).

Здесь выписаны также разложения¹ для рассматриваемых $P_{\lambda}(f)$, соответствующие разложению $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z - \lambda)$ (см. также

¹ Мы будем называть эти разложения разложениями Эйлера—Маклорена для $P_{\lambda}(f)$.

ниже (26)). Подставляя эти разложения для P в (4), где μ, ν берутся равными $M - 1/2, N + 1/2$, или $M = 0, N = 0$, получим разложение Эйлера—Маклорена для соответствующей суммы [1, 2]. При этом остаточный член, определяемый величинами ρ , имеет вид, отличный от обычного, так как в явном виде выделена величина R .

Рассмотрим предельные случаи теоремы 1, соответствующие суммированию бесконечных рядов:

$$1) \text{ если } \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu(f) = 0, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = I_{-\theta, \infty}(f) + P_{-\theta}(f) + R_{-\theta, \infty}(f);$$

$$2) \text{ если } \lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} P_\nu(f) = 0, \text{ то } \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = I_{-\infty, \infty}(f) + R_{-\infty, \infty}(f).$$

Здесь $0 < \theta < 1$ и в обоих случаях предполагается, что исходный ряд и соответствующий ему интеграл $I(f)$ сходятся.

Остановимся подробнее на первом случае.

Теорема 2. а) Пусть функция $f(x + iy)$ аналитична при $x \geq -\theta$ ($0 < \theta < 1$), за исключением произвольного числа полюсов или существенно особых точек $z_k = x_k + iy_k$ ($x_k \neq -\theta, z_k \neq n, n$ — целые числа);

б) существует такая последовательность $\bar{y}_m \rightarrow \pm\infty, |\bar{y}_m - y_k| > \rho > 0$, что равенство $\lim_{\bar{y}_m \rightarrow \pm\infty} e^{-2\pi|\bar{y}_m|} f(x + i\bar{y}_m) = 0$ выполняется равномерно при $-\theta \leq x < \infty$; в) существует такая последовательность $\bar{x}_m \rightarrow \infty, |\bar{x}_m - x_k| >$

$> \rho > 0, |\bar{x}_m - n| > \rho > 0$, что $\lim_{\bar{x}_m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|y|} |f(\bar{x}_m + iy)| dy = 0$; г) инте-

грал $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|y|} |f(-\theta + iy)| dy$ сходится. Тогда

$$\lim_{\bar{x}_m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=0}^{[\bar{x}_m]} f(n) - I_{-\theta, \bar{x}_m}(f) - R_{-\theta, \bar{x}_m}(f) \right\} = P_{-\theta}(f) \quad (8)$$

($[x]$ — целая часть x). При этом, если $\lim_{\bar{x}_m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|y|} |f(\bar{x}_m + iy)| dy = 0$ для всех последовательностей $\bar{x}_m \rightarrow \infty, |\bar{x}_m - x_k| > \rho > 0$, то и (8) справедливо для всех таких последовательностей, не исключая последовательность целых чисел.

Условия б) — г) теоремы 2 выполняются, в частности, если:

$$|f(x + iy)| \leq C(x) e^{b|y|}, \quad b < 2\pi, \quad C(x) < C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = 0 \quad (9)$$

(C — произвольная константа) на двух последовательностях прямых линий:

$$1) x \geq -\theta, y = \bar{y}_m \rightarrow \pm\infty \quad (|\bar{y}_m - y_k| > \rho > 0),$$

$$2) x = \bar{x}_m \rightarrow \infty \quad (|\bar{x}_m - x_k| > \rho > 0, |\bar{x}_m - n| > \rho > 0) \text{ и } x = -\theta;$$

или, практически, если (9) справедливо при $x \geq -\theta, |z - z_k| > \rho > 0$.

Для случая, когда число особых точек z_k конечно, можно упростить формулировку теоремы 2, а именно: в условии б) требовать выполнения соответствующего равенства по-прежнему равномерно относительно x , но при произвольном стремлении y к $\pm\infty$; в условии в) требовать выполнения соответствующего равенства при произвольном стремлении x к $+\infty$; условие г) отбросить. При этом

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=0}^{[x]} f(n) - I_{-\theta, x}(f) \right\} = P_{-\theta}(f) + R_{-\theta, \infty}(f). \quad (8')$$

Если в соотношениях (8), (8') исходный ряд и интеграл $I_{-\theta, \infty}(f)$ сходятся, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = I_{-\theta, \infty}(f) + P_{-\theta}(f) + R_{-\theta, \infty}(f). \quad (10)$$

Здесь $R_{-\theta, \infty}(f) = \lim_{\bar{x}_m \rightarrow \infty} R_{-\theta, \bar{x}_m}(f)$. В дальнейшем для $R_{-\theta, \infty}(f)$ будет использоваться более простая запись (см. также (5) и (5'))

$$R_{-\theta, \infty}(f) = 2\pi i \sum_{x_k > -\theta} \operatorname{res} [f(z) \Omega(z), z_k]. \tag{11}$$

Указанные выше формулы суммирования можно обобщить и на случай, когда у функции $f(z)$ имеются точки ветвления внутри полосы суммирования. При этом появляется дополнительный член $V(f) = \int_L f(z) \Omega(z) dz$,

где L — контур, охватывающий разрезы $f(z)$ внутри полосы суммирования.

3. А. Рассмотрим величину $R_{-\theta, \infty}(f) \equiv R_{-\theta}(f)$. Пусть функция $f(z)$ имеет в качестве особых точек z_k только полюса первого порядка. Тогда

$$R_{-\theta}(f) = \sum_{x_k > -\theta} a(z_k) \omega(z_k), \quad a(z_k) \equiv \operatorname{res} [f(z), z_k], \quad \omega(z) \equiv 2\pi i \Omega(z). \tag{12}$$

Здесь $|\omega(z)| \approx 2\pi e^{-2\pi|y|}$ при $|y| \gg 1$; $\omega(z) \approx 1/(n-z)$ при $|n-z| \ll 1$ (n — целые числа). В дальнейшем нам понадобится также соотношение

$$\omega_{-\theta}(z_0) \equiv R_{-\theta} \left(\frac{1}{z-z_0} \right) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x_0 + \theta)}{2} \omega(z_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Учитывая поведение $\omega(z)$, а также ограничение (9) на функцию $f(z)$ (которое мы считаем справедливым вне ρ -окрестности полюсов z_k), видим, что величина $a(z)\omega(z)$ экспоненциально убывает при увеличении $|y|$. Соответственно при удалении полюсов z_k от вещественной оси величина $R(f)$ экспоненциально стремится к нулю. Однако учет $R(f)$ может быть существенным, если функция $f(z)$ имеет полюса вблизи вещественной оси и, в частности, вблизи чисел суммирования n .

Если полюса z_k можно разбить на две группы, для которых соответственно $|n-z_k| \ll 1$ и $|n-z_k| \gg 1$ (в то время как величины $a(z_k)$ одного порядка), то в первом приближении

$$R_{-\theta}(f) \approx \sum_{|n-z_k| \ll 1} \frac{a(z_k)}{n-z_k}. \tag{13}$$

В этом случае роль величины R сводится к учету отдельных «резонирующих» членов исходного ряда, числа суммирования которых оказываются вблизи полюсов суммируемой функции (точнее, к учету главной части этих членов, относящейся к указанным полюсам).

При наличии у функции $f(z)$ полюсов z_k произвольного порядка с соответствующими им главными частями $g_k(z) = \sum_l \frac{a_l(z_k)}{(z-z_k)^{l+1}}$ аналогичным образом получим

$$R_{-\theta}(f) = \sum_{x_k > -\theta} \sum_l \frac{a_l(z_k)}{l!} \omega^{(l)}(z_k) \approx \sum_{|n-z_k| \ll 1} g_k(n).$$

Последнее приближенное равенство справедливо, если возможно разбиение полюсов на указанные ранее две группы.

При замене формул суммирования (4), (10) разложениями Эйлера—Маклорена для соответствующих сумм следует иметь в виду, что учет члена R может быть существенным (например, при $|n-z_k| \ll 1$), хотя разложения Эйлера—Маклорена для P асимптотически быстро сходятся (малость $n-z_k$ не влияет непосредственно на эту сходимость, и только приближение z_k к границам суммирования ухудшает ее).

Б. Рассмотрим вклад полюсных частей функции $f(z)$ в $P_{-\theta}(f(z))$ и укажем метод улучшения сходимости разложения Эйлера—Маклорена для $P_{-\theta}(f)$, когда полюса $f(z)$ расположены вблизи граничной точки $-\theta$.

Ограничимся сначала функциями $f(z)$, имеющими полюса только первого порядка. Введем величину $\beta_{-\theta}(z_0) \equiv P_{-\theta}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, которую можно непосредственно вычислить:

$$\beta_{-\theta}(z_0) = \ln[(\theta + z_0) \operatorname{sgn}(\theta + x_0)] - \Psi\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + z_0\right) \operatorname{sgn}(\theta + x_0)\right] \quad (14)$$

($\Psi(z)$ — логарифмическая производная Γ -функции). Разложение Эйлера—Маклорена для $\beta_{-\theta}(z)$, например,

$$\beta_{-\theta}(z) = -\frac{1}{2z} + 2 \int_0^{\infty} \frac{tdt}{(t^2 + z^2)(e^{2\pi t} - 1)} \approx -\frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n} \cdot \frac{1}{z^{2n}},$$

является одновременно асимптотическим рядом для $\beta_{-\theta}(z)$, соответствующим $|z| \gg 1$. Поэтому, если у суммируемой функции $f(z)$ имеются полюса z_m , близко расположенные к границе суммирования, то сходимость разложения Эйлера—Маклорена для соответствующего $P(f)$ может быть улучшена выделением из $P(f)$ вклада полюсных частей $f(z)$, соответствующих этим полюсам, с помощью $\beta(z_m)$. Так, если

$$f(z) = F(z) + \sum_m \frac{a(z_m)}{z - z_m}, \quad |z_m| \leq 1, \quad (15)$$

то

$$P_{-\theta}(f) = \sum_m a(z_m) \beta_{-\theta}(z_m) + P_{-\theta}(F), \quad (16)$$

причем разложение Эйлера—Маклорена для $P_{-\theta}(F)$ сходится быстрее, чем для $P_{-\theta}(f)$.

Аналогичным образом, используя соотношение $P_{-\theta}\left(\frac{1}{(z-z_0)^{l+1}}\right) = \frac{\beta_{-\theta}^{(l)}(z_0)}{l!}$, можно выделить из $P_{-\theta}(f(z))$ вклад полюсных частей $f(z)$ и при наличии у $f(z)$ полюсов произвольного порядка.

Отметим, что переход от разложения Эйлера—Маклорена для $P_{-\theta}(f(z))$ к разложению типа (16) соответствует переходу от разложения всей функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z + \theta)$ к предварительному выделению из $f(z)$ некоторых членов разложения Миттаг—Леффлера.

Выделяемый из $P(f)$ вклад полюсных частей функции $f(z)$ может быть объединен с соответствующим вкладом полюсных частей $f(z)$ в $R(f)$. Так, для функций вида (15) получаем

$$P_{-\theta}(f) + R_{-\theta}(f) = \sum_m a(z_m) \Phi_{-\theta}(z_m) + P_{-\theta}(F) + R_{-\theta}(F), \quad (17)$$

где

$$\Phi_{-\theta}(z) \equiv \beta_{-\theta}(z) + \omega_{-\theta}(z) = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=0}^{[v]} \frac{1}{n-z} - \int_{-\theta}^v \frac{dv}{v-z} \right\} = \ln(-\theta - z) - \Psi(-z)$$

($\ln(-z) = \ln z - i\pi \operatorname{sgn} y$, $[v]$ — целая часть v).

В. Рассмотрим роль величины R при суммировании функций с «размазанной границей суммирования». Пусть

$$f(z) = \varphi(z) u(z), \quad u(z) = \frac{1}{1 + e^{x(z-v)}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} u(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(v-x)}{2}. \quad (18)$$

Здесь ν, α — вещественные положительные константы, функция $\varphi(z)$ в полуплоскости $x \geq -\theta$ аналитична и удовлетворяет неравенству $|\varphi(z)| \leq C e^{c_1|y| + c_2x}$, $c_1 < 2\pi$, $c_2 < \alpha$, $C < \infty$. При этом для нахождения $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ можно воспользоваться формулой суммирования (10), которую мы запишем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = S_{-\theta, \infty}(f), \quad S_{-\theta, \nu}(f) \equiv I_{-\theta, \nu}(f) + P_{-\theta, \nu}(f) + R_{-\theta, \nu}(f).$$

Пусть $\alpha \gg 1$. Тогда расстояние между полюсами суммируемой функции, равное $2\pi/\alpha$, много меньше единицы и нельзя выделить небольшую группу полюсов, «близко лежащих к вещественной оси», и ограничиться учетом ее вклада в $R(f)$. В этом случае для вычисления $R(f)$ можно вновь использовать вариант обобщенной формулы суммирования Абеля—Плана (учитывающий, что $\Omega(z)$ имеет разрез вдоль вещественной оси, и использующий в исходной плоскости комплексного переменного z только полуплоскость $x \geq -\theta$). В результате получим

$$R(f) = I_R + P_R, \quad I_R = -\frac{1}{2} \{P_{\nu+0}(\varphi) + P_{\nu-0}(\varphi)\} \equiv -\bar{P}_{\nu}(\varphi),$$

$$P_R = -P_{-\theta}(\varphi \xi) - I_{-\theta, \infty}(\varphi \xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \xi(n), \quad \xi(z) \equiv u(z) - \frac{1 + \operatorname{sgn}(\nu - x)}{2}.$$

Соответственно

$$S_{-\theta, \infty}(f) = \bar{S}_{-\theta, \nu}(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \xi(n), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_{-\theta, \infty}(f) = \bar{S}_{-\theta, \nu}(\varphi), \quad (19)$$

где $\bar{S}_{-\theta, \nu}(\varphi) \equiv I_{-\theta, \nu}(\varphi) + P_{-\theta}(\varphi) - \bar{P}_{\nu}(\varphi)$ является формулой суммирования

Абеля—Плана для $\frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{[\nu+0]} \varphi(n) + \sum_{n=0}^{[\nu-0]} \varphi(n) \right)$.

В (19), кроме основного члена $\bar{S}_{-\theta, \nu}(\varphi)$, достаточно учесть члены с $n = [\nu]$, $[\nu] + 1$ (если $\exp(-\alpha + |c_2|) \ll 1$) или даже только один из этих двух членов, соответствующий n , ближайшему к ν . При этом можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \approx S_{-\theta, N+0}(\varphi) - \frac{\varphi(N)}{1 + e^{\alpha(\nu-N)}}. \quad (20)$$

Здесь N — целое число, ближайшее к ν .

Таким образом учет члена $R(f)$ обеспечивает при увеличении α непрерывный переход от $S_{-\theta, \infty}(f)$ к $\bar{S}_{-\theta, \nu}(\varphi)$, причем $R(f)$ в предельном выражении играет роль $-\bar{P}_{\nu}(\varphi)$.

4. Рассмотрим в общих чертах некоторое обобщение схемы суммирования (4)—(7). Это обобщение позволяет, в частности, суммировать функции, не удовлетворяющие условиям теоремы 1 из-за характера возрастания этих функций на бесконечности.

² Если $(2\pi^2/\alpha) \gg 1$ ($c_2 \ll 1$), то при вычислении $R(f)$ достаточно ограничиться учетом вклада двух ближайших к вещественной оси полюсов (расположенных симметрично относительно нее). При этом получающейся величиной $R(f) \approx (-i2\pi/\alpha) e^{-2\pi^2/\alpha} \times [\varphi(\nu + i\pi/\alpha) e^{i2\pi\nu} - \varphi(\nu - i\pi/\alpha) e^{-i2\pi\nu}]$ можно, как правило, пренебречь.

Пусть суммируемая функция $f(z)$ аналитична в плоскости z , за исключением произвольного числа полюсов z_k , и имеет вид $f(z) = \varphi(z) e^{-\chi(z)}$. Здесь функция $\varphi(z)$ возрастает при $|z| \rightarrow \infty$ значительно слабее, чем $\exp[2\pi|z|]$, в то время как функция $\exp[-\chi(z)]$ по некоторым направлениям может возрастать сильнее, чем $\exp[2\pi|z|]$. Более точно условия на функцию $f(z)$ диктуются непосредственной проверкой применимости изложенной ниже схемы суммирования.

Исходим из формулы суммирования Пуассона для конечной суммы, вытекающей непосредственно из (1), (2):

$$\sum_{n=M}^N f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{\mu,\nu}^m, \quad I_{\mu,\nu}^m = \int_{\mu}^{\nu} f(z) e^{i2\pi mz} dz \quad (21)$$

$$(\mu \equiv M - \theta_M, \nu \equiv N + \theta_N, 0 < \theta_{M,N} < 1).$$

Для вычисления интегралов

$$I_{\mu,\nu}^m = \int_{\mu}^{\nu} \varphi(z) e^{-\chi_m(z)} dz, \quad \chi_m(z) \equiv \chi(z) - i2\pi mz, \quad (22)$$

(за исключением, возможно, $I_{\mu,\nu}^0$) заменим интегрирование по отрезку $(\mu\nu)$ на интегрирование по контуру $\gamma_{\mu,\nu}^m$, состоящему из линий наибоыстрейшего спада функции $\exp[-\chi_m(z)]$, а также из вспомогательных линий. К линиям наибоыстрейшего спада относятся линии γ_{μ}^m и γ_{ν}^m , исходящие соответственно из граничных точек μ, ν , а также линии $\gamma_{\text{перев}}^m$, проходящие через перевальные точки функции $\exp[-\chi_m(z)]$, если такие перевальные линии необходимо использовать для соединения γ_{μ}^m с γ_{ν}^m . Вспомогательные линии соединяют линии наибоыстрейшего спада в областях, где функция $\exp[-\chi_m(z)]$ бесконечно мала. Считаем, что интегралы по вспомогательным линиям равны нулю и что полюса z_k не лежат на контурах $\gamma_{\mu,\nu}^m$. Тогда

$$I_{\mu,\nu}^m = p_{\mu}^m - p_{\nu}^m + r_{\mu,\nu}^m + w_{\mu,\nu}^m;$$

$$p_{\lambda}^m = \int_{\gamma_{\lambda}^m} \varphi(z) e^{-\chi_m(z)} dz, \quad \lambda = \mu, \nu; \quad w_{\mu,\nu}^m = \int_{\gamma_{\text{перев}}^m} \varphi(z) e^{-\chi_m(z)} dz; \quad (23)$$

$$r_{\mu,\nu}^m = 2\pi i \sum_{z_k} \text{res} [\varphi(z) e^{-\chi_m(z)} \tau_{\mu,\nu}^m(z), z_k].$$

Здесь интегрирование по γ_{μ}^m идет в направлении убывания $\exp[-\chi_m(z)]$. Интегрирование по $\gamma_{\text{перев}}^m$ идет в направлении, соответствующем переходу с линии γ_{μ}^m на линию γ_{ν}^m . Далее, здесь $\tau_{\mu,\nu}^m(z) = \pm 1$, если точка z лежит внутри области $\sigma_{\mu,\nu}^m$, ограниченной контуром $\gamma_{\mu,\nu}^m$ и отрезком $(\nu\mu)$, и при обходе по $\gamma_{\mu,\nu}^m$ от μ к ν , а затем по $(\nu\mu)$ от ν к μ находится соответственно справа или слева от направления движения (для простоты предполагается, что точка z обходится один раз); $\tau_{\mu,\nu}^m(z) = 0$, если точка z находится вне $\sigma_{\mu,\nu}^m$.

Используем представление (23) для всех интегралов $I_{\mu,\nu}^m$ с $m \neq 0$. Тогда

$$\sum_{n=M}^N f(n) = I_{\mu,\nu}^0 + P_{\mu}^{\dot{I}} - P_{\nu}^{\dot{I}} + R_{\mu,\nu}^{\dot{I}} + W_{\mu,\nu}^{\dot{I}}; \quad (24)$$

$$P_{\lambda}^{\dot{I}} = \sum_{m \neq 0} p_{\lambda}^m, \quad \lambda = \mu, \nu; \quad R_{\mu,\nu}^{\dot{I}} = \sum_{m \neq 0} r_{\mu,\nu}^m; \quad W_{\mu,\nu}^{\dot{I}} = \sum_{m \neq 0} w_{\mu,\nu}^m.$$

Здесь для P_λ^I имеет место разложение

$$P_\lambda^I = \sum_{n=0}^{K-1} \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [f(z) e^{\chi'(\lambda)(z-\lambda)}] \right\}_{z=\lambda} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} b(z, \lambda) \right\}_{z=\chi'(\lambda)} + \rho_\lambda^{IK}, \quad (25)$$

$$b(z, \lambda) = \bar{b}(z, \lambda) - \frac{1}{z}, \quad \bar{b}(z, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi m}}{z - i2\pi m} = \bar{b}(z, \theta_\lambda) =$$

$$= e^{\theta_\lambda z} \left(\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn} \theta_\lambda}{2} \right),$$

$$\rho_\lambda^{IK} = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{[\chi'(\lambda) - i2\pi m]^K} \int_{\gamma_\lambda^m} \frac{d^K}{dz^K} [f(z) e^{\chi'(\lambda)z}] e^{-\chi'(\lambda)z + i2\pi mz} dz;$$

$\lambda = l + \theta_\lambda$; $0 < |\theta_\lambda| < 1$; l — целое число; ρ_λ^{IK} — остаточный член. Для P_λ^I можно использовать также разложение Эйлера—Маклорена, такое же, как для P_λ (см. (7)), но с видоизмененным остаточным членом

$$P_\lambda^I = \sum_{n=0}^{K-1} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} B_{n+1}(\lambda) f^{(n)}(\lambda) + \rho_\lambda^{IK}, \quad (26)$$

где

$$B_n(\lambda) = B_n(\theta_\lambda) = (-1)^n B_n(-\theta_\lambda) = n \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} b(z, \theta_\lambda) \right]_{z=0},$$

$B_n(\theta) = B_n(\theta)$ при $0 < \theta < 1$, $B_n(\theta)$ — полиномы Бернулли;

$$\rho_\lambda^{IK} = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{(-i2\pi m)^K} \int_{\gamma_\lambda^m} f^{(K)}(z) e^{i2\pi mz} dz - \text{остаточный член.}$$

При $|\chi'(\lambda)| \geq 1$ разложение (25) предпочтительнее разложения (26).

Величину $R_{\mu\nu}^I$ удобно представить в виде

$$R_{\mu\nu}^I = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{res} [f(z) \Omega_{\mu\nu}^I(z), z_k], \quad \Omega_{\mu\nu}^I(z) = \sum_{m \neq 0} \tau_{\mu\nu}^{Im}(z) e^{i2\pi mz}. \quad (27)$$

Схема суммирования (24)—(27) при $\chi(z) = 0$ полностью совпадает со схемой суммирования, вытекающей из обобщенной теоремы Абеля—Плана (см. (4), (5') и (7)). В частности, $R_{\mu\nu}^I$ имеет при этом вид (5'). Отметим, что часть $R_{\mu\nu}^I$, учитывающая вклад полюсов, лежащих достаточно близко к отрезку суммирования $(\mu\nu)$, имеет «абель—плановский» вид (5') или в первом приближении вид (13), не только когда можно положить $\chi(z) = 0$, но, например, и в случае, когда $|\operatorname{Im} \chi'(z)| < 2\pi$ вдоль всей вещественной оси.

Считаем теперь, что для вычисления $I_{\mu\nu}^0$ также применимо представление (23). Тогда формула суммирования приобретает вид

$$\sum_{n=M}^N f(n) = \hat{P}_\mu^I - \hat{P}_\nu^I + \hat{R}_{\mu\nu}^I + \hat{W}_{\mu\nu}^I, \quad (28)$$

$$\hat{P}_\lambda^I = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_\lambda^{Im}, \quad \hat{R}_{\mu\nu}^I = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{\mu\nu}^{Im}, \quad \hat{W}_{\mu\nu}^I = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{\mu\nu}^{Im};$$

$$\hat{R}_{\mu\nu}^I = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{res} [f(z) \hat{\Omega}_{\mu\nu}^I(z), z_k], \quad \hat{\Omega}_{\mu\nu}^I(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tau_{\mu\nu}^{Im}(z) e^{i2\pi mz}. \quad (29)$$

При этом для \hat{P}_λ^I имеет место разложение, отличающееся от разложения (25) заменой $b(z, \lambda)$ на $\bar{b}(z, \lambda)$ и тем, что в остаточном члене сумми-

рование ведется по всем m . Выпишем это разложение, записанное в операторной форме:

$$\tilde{P}_\lambda \approx \left\{ f_\lambda \left(\lambda - \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{b}(z, \lambda) \right\}_{z=\chi'(\lambda)}, \quad f_\lambda(z) \equiv f(z) e^{\chi'(\lambda)(z-\lambda)}. \quad (30)$$

При использовании разложения (30) и соответственно формулы суммирования (28) следует иметь в виду, что $\bar{b}(z, \lambda)$ имеет полюс при $z=0$, и поэтому величина $\chi'(\lambda)$ не должна быть слишком малой. В противном случае следует применять схему суммирования (24) с соответствующим разложением (25) или (26) для P_λ . Аналогичная ситуация имеет место при приближении $\chi'(\lambda)$ к $i2\pi n$ (n — целые числа).

Схема суммирования (28)—(30) применима, в частности, для суммирования в интервале $(0, \eta t)$ или $(0, \infty)$ функций вида $f(z) = \Phi\left(\frac{z}{t}\right) e^{-ix\left(\frac{z}{t}\right)}$, где $t \gg 1$. При $\chi(z) = \pm i\pi z$ эта схема переходит в обычную схему суммирования для знакопеременных сумм [1].

Отметим, что выбор контуров интегрирования $\gamma_{\mu\nu}^m$ во многих случаях может быть упрощен в соответствии с тем, как это делается в методе перевала (см., например [3]). При этом соответственно изменяется разбиение $\gamma_{\mu\nu}^m$ на рассматриваемые нами части (см. [3]), а также вид остаточных членов в изложенной схеме суммирования.

В частности с учетом этого замечания применение (24), (26) к суммированию в интервале $(0, \eta t)$ функций вида $\Phi\left(\frac{z+\delta}{t}\right) e^{-ix\left(\frac{z+\delta}{t}\right)} \equiv F\left(\frac{z+\delta}{t}\right)$ при $t \rightarrow +\infty$ ($z=0, \eta$ правильные точки функции $F(z)$) сразу же сводится к формуле Эйлера—Маклорена для рассматриваемой суммы, в которой, однако, имеется дополнительный член R , учитывающий «абель-плановский» вклад полюсов функции $F\left(\frac{z+\delta}{t}\right)$, соответствующих полюсам $F(z)$, лежащим на отрезке $(0, \eta)$.

5. Покажем, что в квазиклассической амплитуде потенциального рассеяния частиц на нулевой угол, обозначаемой $F(0)$, и соответственно в полном сечении рассеяния $\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} F(0)$ дополнительный член R , возникающий при суммировании ряда типа (10) для $F(0)$, описывает резонансное рассеяние частиц.

Считаем рассеивающий потенциал $V(r)$ сферическим и вещественным. Считаем, что для вычисления амплитуды

$$F(0) = \frac{i}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right) (1 - S_l) = \frac{i}{k} \sum_{\lambda=\frac{1}{2}}^{\infty} \lambda (1 - S(\lambda))$$

($\lambda \equiv l + 1/2$, k — волновой вектор рассеиваемой частицы) с квазиклассической матрицей рассеяния $S_l \equiv S(\lambda)$ можно применять обобщенную формулу суммирования Абея—Плана³, т. е. формулу (10). Тогда

$$F(0) = F_I(0) + F_P(0) + F_R(0),$$

где $F_I(0)$, $F_P(0)$, $F_R(0)$ обозначают соответственно члены I , P , R формулы (10) в применении к ряду для $F(0)$. В квазиклассической области основным членом амплитуды $F(0)$ является $F_I(0)$, учетом которого обычно и ограничиваются. Однако если у $S(\lambda)$ имеются полюса λ_n вблизи вещественной оси, то и величина $F_R(0)$ представляет интерес благодаря своей резонансной зависимости от энергии рассеиваемых частиц. В дальнейшем

³ Для дальнейшего рассмотрения достаточно предположить, что для вычисления $F(0)$ можно применить более общую формулу суммирования (24), где величина R' при учете вклада полюсов, лежащих вблизи вещественной оси, имеет вид (13).

мы подробно рассмотрим величину $F_R(0)$ при наличии у $S(\lambda)$ полюсов вблизи вещественной оси.

А. Введем квазиклассическую матрицу рассеяния S для случая, когда потенциал $U(r, \lambda) = V(r) + \hbar^2 \lambda^2 / 2mr^2$ имеет центробежный барьер, т. е. минимум в точке $\bar{R}(\lambda)$ и максимум в точке $R(\lambda)$, причем при $\Lambda < \lambda < \bar{\Lambda}$ энергия рассеиваемых частиц E лежит между этими экстремальными значениями потенциала. В этом случае потенциал $U(r, \lambda)$ имеет три точки поворота r_i , $\text{Re } r_1 \leq \text{Re } r_2 \leq \text{Re } r_3$, $U(r_i, \lambda) = 0$, причем при $\Lambda < \lambda < \bar{\Lambda}$ все эти точки поворота вещественны. Будем считать, что сближения сразу трех точек поворота не происходит, так что $\sigma_{r_1 r_2}(\Lambda) \gg 1$, $\rho_{r_1 r_2}(\Lambda) \gg 1$ (см. (31)). Тогда, учитывая результаты спивания квазиклассических волновых функций в окрестности точек поворота, можем записать матрицу рассеяния S для $\lambda < \bar{\Lambda}$, являющуюся обобщением соответствующей S матрицы из [4]:

$$\begin{aligned}
 S &= \exp \left\{ 2i \left[\tilde{\Delta} + \text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{1+q}-1}{\sqrt{1+q}+1} \text{tg } \Delta \right) \right] \right\} = \left(\frac{\sqrt{1+q} e^{2i\Delta} + 1}{\sqrt{1+q} + e^{2i\Delta}} \right) e^{2i\tilde{\Delta}}, \\
 \Delta &= \sigma_{r_1 r_2} + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_\infty^a), \quad \tilde{\Delta} = \tilde{\sigma}_{r_3 \infty} + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_\infty^a), \quad q = e^{-2\sigma}, \\
 \sigma_{xy} &= \int_x^y \sqrt{K^2} dr, \quad \tilde{\sigma}_{x\infty} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_x^r \sqrt{K^2} dr - \int_{\lambda/k}^r \sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}} dr \right], \\
 \rho &\equiv \rho_{r_2 r_3} = \int_{r_2}^{r_3} \sqrt{-K^2} dr, \quad K^2 = k^2 \left(1 - \frac{U}{E} \right), \\
 \gamma &= \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\rho}{\pi} \right), \quad \gamma_\infty^a = \frac{\rho}{\pi} \ln \frac{\rho}{\pi e}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь при $\lambda < \Lambda$ имеет место соотношение $r_2^* = r_3$, и в соответствии с выбранным порядком нумерации этих точек аргумент отрицательных в этой области величин $-K^2$ и ρ следует брать равным $\pi \text{sgn } \text{Im } r_3$. Величины Δ и $\tilde{\Delta}$ можно представить в виде, где выделена их основная часть, равная соответственно σ и $\tilde{\sigma}$, и часть, описывающая переходные явления вблизи точки Λ :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sigma + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_\infty), & \tilde{\Delta} &= \tilde{\sigma} + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_\infty), \\
 \gamma_\infty &= \frac{\rho}{\pi} \ln \frac{\rho \text{sgn } \text{Re } \rho}{\pi e}, & (\gamma - \gamma_\infty) &= O\left(\frac{1}{\rho}\right);
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\text{при } \lambda > \Lambda: \quad \sigma = \sigma_{r_1 r_2}, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{r_3 \infty};$$

$$\text{при } \lambda < \Lambda: \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{r_1 r_2} + \sigma_{r_1 r_3}) = \sigma_{r_1 R} + \sigma^s, \quad \tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{r_2 \infty} + \tilde{\sigma}_{r_3 \infty}) = \tilde{\sigma}_{R \infty} - \sigma^s;$$

$$\sigma^s \equiv \frac{1}{2}(\sigma_{R r_2} + \sigma_{R r_3}) \text{ (величина } \sigma^s \text{ обращается в нуль, если для } U(r, \lambda) \text{ на}$$

отрезке $(r_2 r_3)$ можно ограничиться параболическим приближением). При этом не только ρ , Δ , $\tilde{\Delta}$, но и входящие в Δ и $\tilde{\Delta}$ величины σ , $\tilde{\sigma}$, γ , γ_∞ , σ^s вещественны при вещественных λ . Отметим, что точка Λ , в окрестности которой $\rho(\lambda) = \rho'(\Lambda)(\lambda - \Lambda)$, $\rho'(\Lambda) > 0$, не является особой точкой функций $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$, поскольку в разностях $\sigma_{r_1 r_2} - \frac{1}{2}\gamma_\infty^a = \sigma - \frac{1}{2}\gamma_\infty$ и $\tilde{\sigma}_{r_3 \infty} - \frac{1}{2}\gamma_\infty^a = \tilde{\sigma} - \frac{1}{2}\gamma_\infty$ логарифмические члены взаимно сокращаются.

При $\lambda > \bar{\Lambda}$ в пренебрежении переходными явлениями⁴ в окрестности точки $\bar{\Lambda}$ матрица S должна приобретать обычный вид $S = e^{2i\bar{\alpha}}$, что формально соответствует $\rho = +\infty$ в (31).

Все величины, входящие в S -матрицу, могут быть аналитически продолжены⁵ с вещественной оси на плоскость комплексного переменного λ , в частности $e^{i\bar{\alpha}} = \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\rho}{\pi}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\rho}{\pi}\right)}$. При этом полюса S -матрицы определяются уравнением

$$1 + \frac{e^{2i\Delta}}{\sqrt{1+q}} = 0 \quad (q \neq 0). \quad (33)$$

Б. Покажем, что рассматриваемая S -матрица имеет полюса λ_n , расположенные вблизи вещественной оси (именно вблизи отрезка $(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda})$), если центробежный барьер достаточно велик (см. ниже условия (37), (38)). Для этого представим решение уравнения (33) в виде

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \delta\lambda_n, \quad \Delta(\lambda_n^0) = \pi\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad (n - \text{целые числа}), \quad (34)$$

$$\delta\lambda_n = \frac{\ln[1+q(\lambda_n^0 + \delta\lambda_n)]}{4i\left[\Delta'(\lambda_n^0) + \frac{1}{2}\Delta''(\lambda_n^0)\delta\lambda_n + \dots\right]}. \quad (35)$$

Уравнение (34) имеет вещественные решения, так как при вещественных λ функция $\Delta(\lambda)$ вещественна и убывает с ростом λ , начиная от $\Delta(0) \gg 1$. Уравнение (35) будем решать методом последовательных приближений и ограничимся первым приближением

$$\delta\lambda_n^1 = \frac{i \ln[1+q(\lambda_n^0)]}{-4\Delta'(\lambda_n^0)} \approx \frac{iq(\lambda_n^0)}{-4\Delta'(\lambda_n^0)}. \quad (36)$$

Это возможно, если

$$|\delta\lambda_n^1| \approx \left| \frac{1}{4\Delta'(\lambda_n^0)} q(\lambda_n^0) \right| \ll 1, \quad (37)$$

или, несколько точнее, если $\delta\lambda_n^1$ настолько мало, что в $q(\lambda_n)$ и $\Delta'(\lambda_n)$ величину λ_n можно заменить на λ_n^0 , т. е. если

$$|\rho'(\lambda_n^0)\delta\lambda_n^1| \ll 1, \quad \left| \frac{\Delta''(\lambda_n^0)}{\Delta'(\lambda_n^0)} \delta\lambda_n^1 \right| \ll 1. \quad (38)$$

(В дальнейшем мы будем заменять λ_n на λ_n^0 и в $e^{2i\bar{\Delta}(\lambda_n)}$). Так как λ_n^0 вещественно, а $\delta\lambda_n^1$ чисто мнимо, то условие (37) является одновременно усло-

⁴ Переходные явления в окрестности $\bar{\Lambda}$ могут быть описаны добавлением к ρ в формуле (31) величины

$$\frac{1}{2}(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_\infty^a) \equiv \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma_{r_1 r_2}}{\pi}\right)}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sigma_{r_1 r_2}}{\pi} \ln \frac{\sigma_{r_1 r_2}}{\pi e} \right],$$

$$\frac{1}{2}(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_\infty^a) = O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \text{ при } \lambda < \bar{\Lambda}.$$

Однако при этом возникают трудности, связанные с непротиворечивым учетом величин $1/2(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_\infty^a)$ и $1/2(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_\infty^a)$. Следует иметь в виду также, что $r_1^* = r_2$ при $\lambda > \bar{\Lambda}$, и в соответствии с выбранным порядком нумерации этих точек аргумент отрицательных в этой области величин K^2 и $\sigma_{r_1 r_2}$ следует брать равным $\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} r_2$.

⁵ Отметим, что каждая из величин γ_∞ , σ , $\bar{\alpha}$, рассматриваемая по отдельности, а не в комбинации, входящей в S -матрицу, представляет по существу пару аналитических функций, одна из которых задана при $\operatorname{Re} \lambda < \bar{\Lambda}$, а другая — при $\operatorname{Re} \lambda > \bar{\Lambda}$.

вием близости полюсов λ_n к вещественной оси. Практически условия (37), (38), т. е. условия существования полюсов λ_n вблизи вещественной оси, могут выполняться за счет малости величины $q(\lambda_n^0)$, т. е. за счет малой проницаемости центрального барьера. Последнее в свою очередь может иметь место⁶ при $n=0, 1, \dots, N$; $\pi(N+1/2) < \Delta(\Lambda)$, т. е. при $\Lambda < \lambda^0 < \bar{\Lambda}$.

В. Рассмотрим амплитуду

$$F_R(0) = -\frac{i}{k} \sum_{\text{Re } \lambda_n > 0} \lambda_n \text{res} \left[S(\lambda) \omega \left(\lambda - \frac{1}{2} \right), \lambda_n \right], \quad (39)$$

в которой будем учитывать вклад только полюсов, расположенных вблизи вещественной оси. Тогда в рассматриваемом приближении

$$F_R(0) = -\frac{2i}{k} \sum_{\substack{\Lambda < \text{Re } \lambda_n < \bar{\Lambda} \\ |\text{Im } \lambda_n| \ll 1}} \lambda_n^0 \eta_n e^{2i\bar{\Delta}(\lambda_n^0)}; \quad \eta_n \equiv \delta\lambda_n^1 \omega \left(\lambda_n - \frac{1}{2} \right) = \frac{-2\pi i \delta\lambda_n^1}{1 + e^{-2\pi i \lambda_n}}. \quad (40)$$

Здесь

$$\eta_n \approx \frac{\delta\lambda_n^1}{l + \frac{1}{2} - \lambda_n} \sim 1,$$

если

$$\left| \lambda_n - \left(l + \frac{1}{2} \right) \right| \ll 1 \quad (41)$$

(l — целые числа), т. е. если

$$\left| \lambda_n^0 - \left(l + \frac{1}{2} \right) \right| \ll 1 \quad (42)$$

(малость $\delta\lambda_n$ следует из (36), (37)). В остальных случаях $|\eta_n| \ll 1$. В соответствии с этим ограничимся учетом вклада в $F_R(0)$ полюсов, удовлетворяющих условию (41). При этом получим выражение $F_R(0)$, соответствующее использованию приближения (13):

$$F_R(0) = -\frac{2i}{k} \sum_{\left| \lambda_n - \left(l + \frac{1}{2} \right) \right| \ll 1} \frac{\lambda_n^0 \delta\lambda_n^1}{\left(l + \frac{1}{2} \right) - \lambda_n^0 - \delta\lambda_n^1} e^{2i\bar{\Delta}(\lambda_n^0)}. \quad (43)$$

Условие (42) и соответственно условие (41) может выполняться при некоторых значениях E вследствие зависимости λ_n^0 от E , причем, как правило, только для какого-то одного полюса λ_{n_0} . Соответственно сумма (43) сведется либо к одному члену

$$F_R(0) = -\frac{2i}{k} \cdot \frac{\lambda_{n_0}^0 \delta\lambda_{n_0}^1}{\left(l + \frac{1}{2} \right) - \lambda_{n_0}^0 - \delta\lambda_{n_0}^1} e^{2i\bar{\Delta}(\lambda_{n_0}^0)}, \quad (44)$$

либо к нулю.

Г. Рассмотрим зависимость амплитуды $F_R(0)$ от энергии E . Амплитуда $F_R(0)$ в соответствии с (39) имеет в комплексной E -плоскости полюса E_{nl} , определяемые уравнениями

$$\lambda_n(E_{nl}) = l + \frac{1}{2}. \quad (45)$$

Эти полюса являются одновременно полюсами S -матрицы в комплексной E -плоскости при полуцелых $\lambda = l + 1/2$, т. е. являются решениями (33)

⁶ Если $\lambda_n^0 > \bar{\Lambda}$, то в соответствии со сноской 4 на стр. 42 имеем $q(\lambda_n^0) = 0$, а значит, $\lambda_n = \lambda_n^0$, $q(\lambda_n) = 0$. Отсюда с учетом (33) следует, что эти λ_n не являются полюсами S -матрицы.

при $\lambda = l + 1/2$. Из (45) или (33), используя приближение, базирующееся на малости величины q и аналогичное приближению (38) (с той разницей, что теперь рассматривается зависимость от E , а не от λ), находим

$$E_{nl} = E_{nl}^0 + \delta E_{nl}^1 = E_{nl}^0 - i\Gamma_{nl},$$

$$\lambda_n^0(E_{nl}^0) = l + \frac{1}{2}, \quad \Delta\left(l + \frac{1}{2}, E_{nl}^0\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + n\right), \quad (46)$$

$$\Gamma_{nl} = \frac{\delta\lambda_n^1(E_{nl}^0)}{i\left(\frac{d\lambda_n^0}{dE}\right)_{E_{nl}^0}} = \frac{\ln\left[1 + q\left(l + \frac{1}{2}, E_{nl}^0\right)\right]}{4\left(\frac{\partial\Delta}{\partial E}\right)_{l+\frac{1}{2}, E_{nl}^0}} \approx \frac{q\left(l + \frac{1}{2}, E_{nl}^0\right)}{4\left(\frac{\partial\Delta}{\partial E}\right)_{l+\frac{1}{2}, E_{nl}^0}}.$$

Расстояние найденных полюсов E_{nl} от вещественной оси, равное Γ_{nl} , благодаря малости величины q много меньше расстояния между полюсами, отличающимися по индексу l или n на ± 1 . Отметим, что величины E_{nl} являются энергиями квазистационарных уровней в потенциале $U(r, l + 1/2)$.

Выражение (44), к которому сводится амплитуда $F_R(0)$, когда она не мала, с точки зрения рассмотрения в комплексной E плоскости имеет место, если E находится вблизи полюса $E_{n_0 l_0}$ и достаточно далеко от остальных полюсов E_{nl} , т. е. если $|E - E_{n_0 l_0}| \ll |E - E_{nl}|$. В соответствии с этим разложим амплитуду (44) в ряд по степеням $(E - E_{n_0 l_0})$ и ограничимся учетом только основного полюсного члена. При этом в рассматриваемом приближении

$$F_R(0) = -\frac{2l_0 + 1}{k} \cdot \frac{\Gamma_{n_0 l_0}}{E - E_{n_0 l_0}^0 + i\Gamma_{n_0 l_0}} e^{2i\delta\left(l_0 + \frac{1}{2}, E_{n_0 l_0}^0\right)}. \quad (47)$$

Выражение (47) для $F_R(0)$ обладает характерной резонансной зависимостью от энергии E и является амплитудой резонансного рассеяния на квазистационарном уровне $E_{n_0 l_0}$.

В квазиклассической области амплитуда $F_R(0)$ мала по сравнению с основной частью амплитуды рассеяния $F_I(0)$, так как $F_R(0) \sim \Lambda/k$, в то время как $F_I(0) \sim \Lambda^2/k$ ($\Lambda \gg 1$). Однако $F_R(0)$ имеет качественно иную зависимость от энергии E , чем $F_I(0)$, и поэтому учет $F_R(0)$ существен, если нас интересует энергетическая зависимость амплитуды рассеяния $F(0)$ и соответственно полного сечения рассеяния частиц.

В заключение автор выражает благодарность М. В. Казарновскому, Л. Я. Цлафу и Д. А. Запкину за полезные обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Lindelöf*. Le calcul des residus. Paris, 1905.
2. *Г. Харди*. Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951.
3. *Н. Г. де Брейн*. Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 1961; *М. А. Ес-графов*. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962.
4. *K. W. Ford, D. L. Hill, M. Wakano, J. A. Wheeler*. Ann. Phys., 7, 239 (1959); *K. W. Ford, J. A. Wheeler*. Ann. Phys., 7, 259 (1959).

Поступила в редакцию
29 января 1971 г.

Г. Е. БЕЛОВИЦКИЙ, Л. Н. КОЛЕСНИКОВА,
О. С. ПРЕСНЯК, Л. В. СУХОВ

РАЗВИТИЕ МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ

1. Введение. Исследование энергетической зависимости дифференциальных сечений рассеяния быстрых нейтронов (более 10 Мэв) может дать важную информацию как о механизме взаимодействия нейтронов с ядрами, так и спектроскопическую.

Такие исследования в недалеком прошлом привели к открытию аналоговых состояний. Подобного рода исследования с помощью нейтронов выполнены в основном для энергий < 10 Мэв. Это в значительной мере обусловлено трудностями, которые возникают при измерении угловых распределений нейтронов больших энергий. Такие опыты требуют интенсивных пучков моноэнергетических нейтронов с плавно изменяемой энергией, эффективных детекторов с хорошим энергетическим разрешением и хорошей защитой детектора от фоновых нейтронов.

Требование к интенсивности первичного пучка нейтронов может быть существенно снижено, если измерение угловых распределений выполняется одновременно под многими углами. В этом направлении оказалось возможным сделать еще один шаг вперед посредством более эффективного использования первичного пучка нейтронов — одновременным облучением двух и более рассеивателей, что эквивалентно использованию двух и более ускорителей.

Ниже приводится описание установки, в которой осуществлены оба способа повышения коэффициента полезного действия нейтронного генератора посредством одновременного облучения двух образцов нейтронами разной энергии и измерения угловых распределений для каждого из них под пятью углами. В качестве детекторов рассеянных нейтронов использовались толстослойные ядерные фотоэмульсии.

2. Двухсторонний многоцелевой коллиматор. Как известно, при измерении дифференциальных сечений рассеяния быстрых нейтронов на рассеивателях малого веса одной из основных помех являются фоновые нейтроны. Это могут быть нейтроны прямого потока, прошедшие теньевую защиту, нейтроны, рассеянные на элементах защиты и мишенном устройстве, а также стенах и воздухе мишенной. Для защиты от фоновых нейтронов нами был разработан новый двухсторонний многоцелевой коллиматор. При создании этого коллиматора были использованы результаты опытов по измерению фона в условиях разной геометрии и разных толщин защитных экранов, описанных в нашей работе [1]. Из этой же работы заимствованы основные размеры защитных экранов.

Вид установки в разрезе показан на рис. 1, а общий вид — на рис. 2. Стальная плита p является теньевой защитой и основным конструктивным элементом всей установки. Ее размеры выбраны такими, чтобы обеспе-

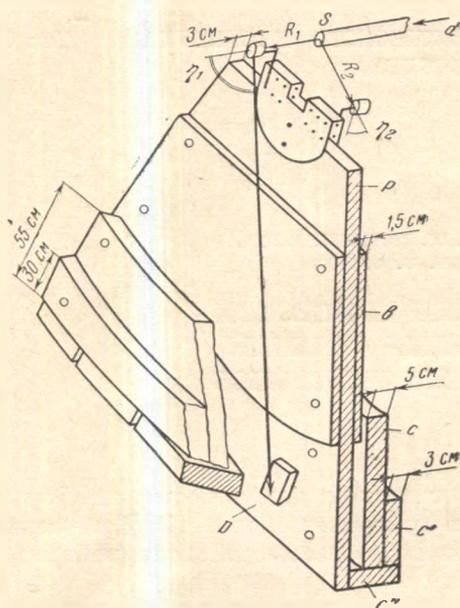


Рис. 1. Вид двухстороннего коллиматора в разрезе

η — углы рассеяния, R — расстояние до образцов, D — фотопластинка

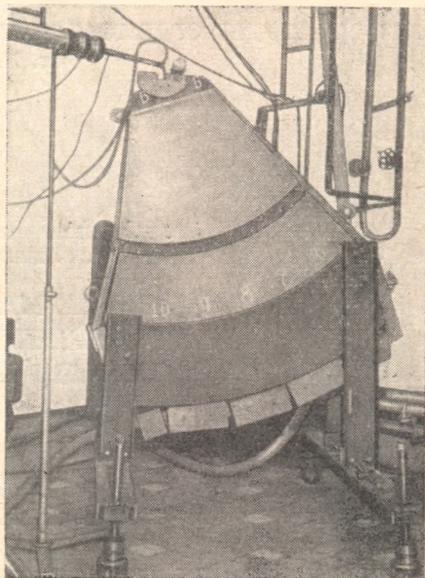


Рис. 2. Общий вид коллиматора

чить эффективную защиту от нейтронов прямого потока. Стальные плиты b , c , c' , c'' служат для защиты от рассеянных нейтронов и γ -лучей и сконфигурованы так, чтобы фотопластинки видели только образцы (размеры основных элементов установки приведены на рисунке). Плиты b и c обеспечивают для каждой фотопластинки входной коридор, для чего между ними сделан воздушный зазор, равный 13 мм, для прохождения на детекторы нейтронов, рассеянных от образцов. Плиты b , навешиваемые с обеих сторон на основную плиту P , ограничивают зазоры с одной стороны, а плиты c — с другой. Они служат для поглощения нейтронов, рассеивающихся в воздухе и металле непосредственно у мишени, и нейтронов, рассеянных на воздухе вблизи образца и в помещении мишени. Плиты c' имеют то же самое назначение, а железные брусья c'' закрывают камеру детекторов снизу от рассеянных нейтронов и γ -лучей.

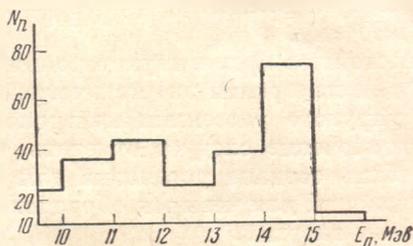
Коллиматор имеет две камеры для детекторов, которые расположены по обеим сторонам основной плиты P . В каждой из камер фотопластинки в герметичных кассетах располагаются под пятью фиксированными углами. Фотопластинки защищены от источника нейтронов S слоем железа в 75 см, что позволяет сильно ослабить поток нейтронов, проходящих тенью защиту. Углы рассеяния можно изменять в определенных пределах передвижением фотопластинок, образцов, коллиматора. Образцы крепятся на коллиматоре на расстоянии приблизительно 8 см от мишени. Можно осуществить несколько наборов углов рассеяния в пределах от 45 до 138°. Конструкция коллиматора позволяет использовать два образца, которые облучаются нейтронами разной энергии. Энергия первичных нейтронов, падающих на образцы, может изменяться при работе на толстой тритиевой мишени поворотом коллиматора относительно первичного пучка дейтонов, при работе с тонкой тритиевой мишенью — изменением энергии первичных дейтонов.

Хотя обе стороны коллиматора идентичны, фоновые условия для них могут несколько различаться, так как на одной из сторон (обозначим эту сторону коллиматора буквой *B*, а противоположную — *A*) находится мишенное устройство, по которому ускоренные дейтроны попадают на мишень. В связи с этим было изготовлено мишенное устройство, очень легкое по весу и выдерживающее токи до 500 *мкА*, которые нужны для получения больших потоков нейтронов.

Мишенное устройство выполнено в виде стальной трубы длиной 300 *мм* и диаметром 18 *мм*, толщиной 0,3 *мм*. На конце трубы крепится стандартная (*Zr+T*)-мишень, которая охлаждается в процессе работы проточной водой.

3. Результаты измерения фона. Для экспериментальной оценки величин фона в различных условиях были выполнены два облучения (энергия дейтронов ~ 300 *кэВ*). В первом облучении плоскость коллиматора была перпендикулярна к направлению первичного пучка дейтронов. Во втором облучении плоскость коллиматора составляла с направлением этого пучка угол 30°. Кроме того, для уменьшения фона была увеличена длина сектора *b* на 12 *см*.

Рис. 3. Энергетический спектр фоновых нейтронов



Результаты измерения фона для нейтронов с энергией > 10 *МэВ* приведены в таблице. Во второй графе даны углы рассеяния γ . В 4, 5 и 6-й колонках приведено число фоновых нейтронов для трех интервалов энергий, рассчитанное на один первичный нейтрон, на единицу просмотренного объема фотослоя, на единицу телесного угла и на интервал энергий 0,2 *МэВ*.

Номер облучения	γ°	Сторона	Интервал энергий, <i>МэВ</i>		
			10—12	12—14	13—15
1	65	<i>B</i>	$1,73 \pm 0,20$	$2,10 \pm 0,25$	$1,33 \pm 0,19$
	65	<i>A</i>	$1,33 \pm 0,24$	$1,54 \pm 0,25$	$1,30 \pm 0,26$
2	65	<i>A</i>	$0,80 \pm 0,07$	$1,08 \pm 0,08$	$1,31 \pm 0,10$
	93	<i>A</i>	$1,05 \pm 0,18$	$1,04 \pm 0,16$	$1,09 \pm 0,08$

Примечание. Число фоновых нейтронов, $\times 10^{-10}$.

Из приведенных данных видно, что фон в облучении 2 для всех интервалов энергий меньше фона в облучении 1, кроме 65° в интервале 13—15 *МэВ*. Это, по-видимому, связано с увеличением длины бруса *b*. В облучении 2 фон для угла $\gamma = 65^\circ$ больше, чем для угла 93° в интервале 13—15 *МэВ*, что обусловлено энергетической анизотропией первичного пучка нейтронов, испускаемых под этими углами.

Энергетический спектр фоновых нейтронов для угла рассеяния 65°, полученный во втором облучении, приведен на рис. 3. Уместно привести

величину фона, измеренную на устройстве, имеющем защиту только от нейтронов прямого потока. Она равна $7,0 \times 10^{-18}$, т. е. коллиматор обеспечивает надежное подавление фона примерно в 5—7 раз. В то же время этот фон несколько больше, чем на коллиматоре, описанном в работе [1]. Одной из возможных причин этого может быть несколько большая длина бруса s , на котором происходит рассеяние нейтронов, попадающих затем в фотопластинки.

Как видно из таблицы, фон на стороне B для двух энергетических интервалов больше, чем на стороне A . Это может быть обусловлено дополнительным рассеянием нейтронов на мишенном устройстве. Отсутствие этого эффекта для нейтронов в интервале 13—15 $Mэв$ связано с условием опыта, а именно анизотропией первичного пучка нейтронов.

Представляется целесообразным сопоставить наблюдаемое различие в величинах фона на сторонах B и A с ожидаемым. Зная разность фонов $B-A$, можно рассчитать дифференциальное сечение упругого рассеяния нейтронов с энергией 14 $Mэв$ для железа под углом 90° и сравнить его с табличным значением. При совпадении этих величин разница в фонах вызвана «подсвечиванием» мишени.

Расчет дал величину $\sigma_{Fe}(90^\circ) = 34$ мб, близкую к табличному значению (≈ 30 мб).

В настоящее время двухсторонний многоцелевой коллиматор используется для измерения энергетической зависимости дифференциальных сечений упругого рассеяния нейтронов 13—15 $Mэв$ на изотопах свинца.

В заключение следует отметить, что на изложенном выше принципе может быть создана установка для одновременного измерения угловых распределений для четырех образцов и соответственно нейтронов четырех различных энергий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Беловицкий, Л. Н. Колесникова, Л. В. Сухов, Т. А. Романова. ПТЭ, № 5, 206 (1969); Труды ФИАН, 63, 123 (1972).

М. В. КАЗАРНОВСКИЙ, Е. М. МОРОЗ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИОНОВ ПРИ УСКОРЕНИИ В ЦИКЛОТРОНЕ

1. **Введение.** Поперечный и продольный эффекты пространственного заряда в циклотроне рассмотрены в ряде работ (см., например, [1, 2]), в которых, к сожалению, не был правильно учтен вклад поля соседних ступок в продольный кулоновский эффект. В настоящей работе даны формулы, удобные для расчета этих эффектов. Все численные оценки сделаны для спектрометрического циклотрона [3, 4] с током $J=100$ *мкА*, частотой обращения ионов $\omega/2\pi=10$ *МГц*, максимальной энергией 80—100 *МэВ* и допустимым энергетическим разбросом в пучке $\epsilon = \frac{\Delta W}{W} = 10^{-4}$. При выводе всех формул используется система СГСЕ, а конкретные оценки приведены в удобных для практики единицах, указываемых в каждом частном случае.

2. **Поперечное электрическое поле ступка.** Каждый ступок ионов, обращающихся в циклотроне, несет заряд

$$Q = \frac{2\pi J}{q\omega} = \frac{10^{-11}}{q} k, \quad Q = \frac{2q_0 J}{\omega} \quad (1)$$

где q — кратность частоты ускоряющего напряжения (q — целое число, $1 \leq q \leq 4$ в рассматриваемом циклотроне) и содержит число частиц

$$N_s = \frac{Q}{Ze} = \frac{6 \cdot 10^7}{Zq}, \quad (2)$$

где Ze — заряд ускоряемого иона.

Предполагая, что ступок представляет собою эллиптический цилиндр с однородным распределением заряда (ниже будет показано, что такое распределение заряда в ступке ионов является устойчивым), получим плотность заряда в ступке

$$\rho = \frac{Q}{2\pi ab R \varphi_0} = \frac{J}{q\omega ab R \varphi_0} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-10}}{R_{(см)}} \text{ н/см}^3. \quad \rho = \frac{J}{\omega k \cdot \pi ab} \quad (3)$$

Здесь πab — площадь поперечного сечения ступка; $2R\varphi_0$ — длина ступка, радиально направленная полуось которого для проектируемого циклотрона равна $a=0,2$ *см*, вертикальная (аксиальная) полуось — $b=0,5$ *см*; R — средний радиус орбиты циклотрона — изменяется от $R_{\min}=20$ *см* для инжектируемых ионов до $R_{\max}=260$ *см* для выводимых ионов (кроме того, мы будем рассматривать и вариант, в котором $R_{\max}=400$ *см*); $2\varphi_0=(0,1/q) \cdot 2$ — угловая протяженность ступка. В изохронном циклотроне угловая протяженность ступка является константой, не изменяющейся в процессе ускорения. Это следует из отсутствия зависимости частоты обращения ω от энергии частицы. В спектрометрическом изохронном циклотроне, как будет показано ниже (см. раздел 6), попереч-

ные размеры сгустков a и b можно считать практически постоянными, не зависящими от радиуса R орбиты.

Как видно из (3), плотность заряда в сгустках не зависит от кратности q радиочастоты. Действительно, с одной стороны, при увеличении кратности q увеличивается число сгустков на орбите и соответственно уменьшается число заряженных частиц в каждом сгустке при сохранении тока J пучка циклотрона. Однако, с другой стороны, во столько же раз приходится уменьшать угловую протяженность, а следовательно, и длину каждого сгустка для сохранения его «протяженности» в электрических градах, т. е. в градусах фазы ускоряющего напряжения $q2\varphi=0,2$. Это соответствует разбросу энергии ионов в сгустках $\Delta W=10^{-4}W$. Таким образом, при сохранении поперечных размеров пучка увеличение кратности частоты ускоряющего напряжения приводит к пропорциональному уменьшению объема каждого сгустка и числа заряженных частиц в нем, так что плотность ρ заряда в сгустке не изменяется.

Частицы в сгустке удерживаются вблизи радиуса и плоскости орбиты упругими силами (магнитная фокусировка), соответственно равными $-m\omega_r^2 x$ и $-m\omega_z^2 z$, где $m=Am_0$ — масса частицы (m_0 — масса иона водорода, A — атомный вес ускоряемого иона); x и z — отклонения ее от радиуса R орбиты и от плоскости орбиты, а $\omega_{r,0}$ и $\omega_{z,0}$ — соответственно частоты радиальных и аксиальных бетатронных колебаний частицы в циклотроне при $Q=0$, причем можно положить

$$\omega_{r,0} = \omega_{\nu_{r,0}}; \quad \omega_{z,0} = \omega_{\nu_{z,0}}. \quad (4)$$

Здесь $\nu_{r,0} \approx 1,06 \div 1,12$, $\nu_{z,0} \approx 0,7 \div 0,8$ — соответственно числа радиальных и аксиальных бетатронных колебаний частицы за оборот при $Q=0$, причем нижние пределы $\nu_{r,0}$ и $\nu_{z,0}$ соответствуют центральной области циклотрона $R \approx R_{\min}$, верхние пределы — периферии, $R \approx R_{\max}$ (см. [3]). Таким образом, согласно [3], величины $\omega_{r,0}$ и $\omega_{z,0}$ возрастают, хотя и незначительно, с ростом радиуса орбиты.

В настоящем разделе мы предполагаем для простоты, что по азимуту сгусток можно считать бесконечно длинным по сравнению с его поперечными размерами. Это предположение справедливо в циклотроне всюду, кроме узкой центральной области, а в ней расположено лишь небольшое число орбит, поскольку расстояния между орбитами в центральной области циклотрона значительно превышают соответствующие расстояния на больших радиусах. Кроме того, поскольку, как будет показано ниже, поперечные эффекты в нашем случае малосущественны, нет необходимости проводить их расчет с более высокой точностью.

Нетрудно показать (одно из возможных доказательств приведено в приложении I), что напряженность электрического поля внутри однородно заряженного бесконечного эллиптического цилиндра с плотностью заряда ρ и полуосями, направленными по осям x и z и соответственно равными a и b , определяется выражениями

$$E_x = 4\pi\rho \frac{b}{a+b} x, \quad E_z = 4\pi\rho \frac{a}{a+b} z. \quad (5)$$

Напряженность поля внутри сгустка линейно возрастает при удалении от его оси и на поверхности сгустка достигает максимальной величины:

$$E_{\max} = 4\pi\rho \frac{ab}{a+b} = \frac{2Q}{R_{\Phi 0}(a+b)} \approx \frac{250}{R(\text{см})} \text{ в/см}. \quad (6)$$

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний. Во-первых, отметим, что, так же как и плотность пространственного заряда, напряженность электрического поля сгустка при заданном токе J пучка не за-

висит от кратности радиочастоты, подаваемой на дуанты циклотрона, потому что величины Q и φ_0 обратно пропорциональны q . Далее, отметим также, что, хотя при выводе формул для напряженности электрического поля сгустка было сделано предположение $R\varphi_0 \gg a$, $R\varphi_0 \gg b$, не являющееся справедливым для центральной области циклотрона, полученные формулы (5) и (6) применимы для оценок и в этой области, даже для самых первых орбит. Это видно, в частности, из того факта, что, если в (6) положить $a=b=R\varphi_0=r$, то получим поле на поверхности сферического сгустка $E_{\max}=Q/r^2$, где r — радиус шара. Такое совпадение не случайно. Электрическое поле внутри и на поверхности равномерно заряженного эллипсоида тоже удовлетворяет уравнениям (5) и (6). В силу всех высказанных здесь соображений можно пользоваться формулой (6) и для грубой оценки максимального значения продольной составляющей электрического поля на переднем или заднем краю равномерно заряженного сгустка.

3. О влиянии соседних сгустков и отражений на поперечные компоненты поля. В центральной области циклотрона расстояния между сгустками, находящимися на соседних орбитах, так же как и расстояния от сгустка до стенок вакуумной камеры и дуантов, велики по сравнению с поперечными размерами сгустка, поэтому действие полей соседних сгустков, почти полностью компенсирующих друг друга, и тем более влияние отражений в верхней и нижней стенках камеры и дуантов являются пренебрежимо малыми по сравнению с электрическим полем самого сгустка. Вдали от центральной области циклотрона расстояния ΔR между сгустками, находящимися на соседних орбитах, становятся сравнимыми по порядку величины с поперечными размерами сгустка, что приводит к уменьшению радиальной составляющей электрического поля и увеличению аксиальной составляющей. В предельном случае, когда сгустки перекрываются, мы приходим к представлению о заряженном секторе плоского диска, в котором плотность заряда $\langle \rho \rangle$ вычисляется по формуле

$$\langle \rho \rangle = \frac{Q}{4bR\varphi_0\Delta R}. \quad (7)$$

Величину ΔR найдем, пользуясь пропорциональностью между квадратом радиуса и кинетической энергией W иона.

$$R^2 \sim W. \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2} \frac{\Delta W}{W}, \quad (9)$$

где ΔW — приращение энергии иона за оборот, и

$$R^2/W = R_{\max}^2/W_{\max}. \quad (10)$$

Комбинируя (9) и (10), находим

$$\frac{1}{2R\Delta R} = \frac{W}{R^2\Delta W} = \frac{W_{\max}}{R_{\max}^2\Delta W} = \frac{n_{\max}}{R_{\max}^2}, \quad (11)$$

где $n_{\max} = W_{\max}/\Delta W \approx 330$ — число оборотов иона в циклотроне при ускорении до конечной энергии W_{\max} . Подставляя (11) и (1) в (7), получаем

$$\langle \rho \rangle = \frac{Qn_{\max}}{2b\varphi_0R_{\max}^2} = \frac{\pi J n_{\max}}{q\omega\varphi_0 b R_{\max}^2} \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ к/см}^3. \quad (12)$$

При этом

$$\Delta R = \frac{R_{\max}^2}{2n_{\max}R} \approx \frac{100}{R_{(см)}} \text{ см}. \quad (13)$$

Вертикальная составляющая электрического поля заряженного сектора

$$\langle E_z \rangle = 4\pi \langle \rho \rangle z = \frac{4\pi^2 J n_{\max}}{q\omega\varphi_0 R_{\max}^2} \cdot \frac{z}{b} \quad (14)$$

возрастает пропорционально отклонению z от плоскости орбиты и на границе $z=b$ заряженной области достигает наибольшего значения

$$\langle E_z \rangle_{\max} = \frac{2\pi Q n_{\max}}{\varphi_0 R_{\max}^2} = \frac{4\pi^2 J n_{\max}}{q\omega\varphi_0 R_{\max}^2} \approx 3 \text{ в/см.} \quad (15)$$

Напряженность поля $\langle E_z \rangle$, так же как и плотность заряда $\langle \rho \rangle$ заряженного сектора, не зависит от радиуса R орбиты, потому что с ростом R увеличение плотности заряда, обусловленное уменьшением расстояния ΔR между соседними орбитами, компенсируется уменьшением плотности, вызываемым ростом азимутальной длины $2R\varphi_0$.

Влиянием отражений заряда в стенках камеры и дуантов на величину поля $\langle E_z \rangle$ можно пренебречь и вдали от центра циклотрона, поскольку поля отражений одинакового порядка в верхней и нижней стенках практически взаимно компенсируются внутри заряженной области $0 < |z| < b \ll D$. Здесь D — расстояние между горизонтальными стенками камеры или дуантов.

4. Равновесное распределение заряда. Нетрудно показать, что равновесным распределением заряда в сгустке является равномерное распределение при эллиптической форме равновесных границ сгустка. Действительно, напряженность электрического поля E , создаваемого сгустком при равновесном распределении заряда, можно найти из условия, что в равновесии сумма всех сил, действующих на частицу сгустка, должна быть равна нулю. Поэтому в области, где имеются заряды, согласно (4), должны выполняться соотношения

$$ZeE_x = m\omega^2 v_{r,0}^2 x, \quad ZeE_z = m\omega^2 v_{z,0}^2 z. \quad (16)$$

Используя известное соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \quad (17)$$

находим, что равновесная плотность заряда ρ_e постоянна:

$$\rho_e = \frac{m\omega^2}{4\pi Ze} (v_{r,0}^2 + v_{z,0}^2) \approx \frac{2A}{Z} (\text{ГГСЕ}) \approx \frac{A}{Z} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \text{ к/см}^3. \quad (18)$$

Остается найти границу распределения заряда. Покажем, что такой границей является эллипс вида

$$x^2/v_{z,0}^4 + z^2/v_{r,0}^4 = \text{const.} \quad (19)$$

Для этого воспользуемся теоремой единственности решения уравнения электростатики внутри некоторой области, если известно распределение зарядов в этой области и нормальная составляющая напряженности поля на границе. Выберем в качестве границы рассматриваемой области границу заряда. Тогда, поскольку поле вида (16) удовлетворяет уравнению электростатики (17) в этой области, достаточно показать, что на ее границе нормальная составляющая E совпадает с истинной для данного распределения заряда, т. е. при отсутствии зарядов во внешней области. Как показано в приложении I, напряженность электрического поля на поверхности однородно заряженного бесконечного эллиптического цилиндра с плотностью заряда ρ и полуосями, направленными по осям x и z и соответственно равными a и b , определяется выражениями (5),

т. е. поле E (а следовательно, и его нормальная составляющая) совпадает с (16), если выполняется условие (18) и

$$b/a = v_{r,0}^2/v_{z,0}^2 \approx 2 \div 2,3. \quad (20)$$

Итак, действительно границей равновесного заряда является эллипс вида (19).

Аналогичным образом находим равновесную плотность для заряженного сектора плоского диска:

$$\langle \rho_e \rangle = \frac{m\omega^2}{4\pi Ze} v_{z,0}^2 \approx \rho_e \frac{v_{r,0}^2}{v_{r,0}^2 + v_{z,0}^2} \approx \frac{1}{3} \rho_e \approx \frac{A}{Z} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \text{ к/см}^3. \quad (21)$$

5. Абсолютный предел тока в циклотроне. Равновесная плотность пространственного заряда ρ_e , выраженная формулой (18), является пределом плотности заряда в циклотронных сгустках. Это означает, что при инъекции более плотных сгустков в циклотрон их поперечные размеры будут увеличиваться. Используя первое равенство из формулы (3), а также формулы (18) и (20), мы получаем критерий для предельного тока в разделенных сгустках

$$J < J_e = \frac{qb^2 R \varphi_0 m \omega^3 (v_{r,0}^2 + v_{z,0}^2)}{4\pi Ze} \cdot \frac{v_{z,0}^2}{v_{r,0}^2} = \frac{qa^2 R \varphi_0 m \omega^3 (v_{r,0}^2 + v_{z,0}^2)}{4\pi Ze} \cdot \frac{v_{r,0}^2}{v_{z,0}^2}. \quad (22)$$

Аналогично из (12) и (21) находим другой критерий для предельного тока циклотрона

$$J < J_{\langle e \rangle} = \frac{qb R_{\max}^2 \varphi_0 m \omega^3 v_{z,0}^2}{4\pi^2 Z e n_{\max}}. \quad (23)$$

Сравнение этих критериев

$$\frac{J \langle e \rangle}{J_e} = \frac{R_{\max}^2 (см)}{\pi b R_{(см)} n_{\max}} \approx \frac{100}{R_{(см)}} \quad (24)$$

показывает, что при заданном вертикальном размере сгустков $2b \approx 1$ см критерий (22) является более жестким в центральной области циклотрона. Однако, если поставлена задача получения предельного тока в циклотроне, то, допуская перекрытие сгустков, находящихся на соседних орбитах, и жертвуя, таким образом, моноэнергетичностью и выводимостью пучка, можно увеличить поперечные размеры сгустков и азимутальный размер в несколько раз. Тогда определяющим становится критерий (23), который для рассматриваемого секторного циклотрона при подстановке вполне реальных значений $b = 3$ см, $\varphi_0 = 0,3/q$ дает $J_{\langle e \rangle, \max} \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{A}{Z} a$. Как будет показано ниже, в разделе 6, учет необходимости избежать прохождения частоты ν_z аксиальных колебаний через параметрический резонанс $\nu_e = 1/2$ приводит к уменьшению вычисленного предельного тока $J_{\langle e \rangle, \max}$ всего в 2 раза. Таким образом, в принципе секторный циклотрон пригоден для ускорения очень больших ионных токов. Однако на пути к реализации этих принципиальных возможностей стоят пока еще не разрешенные проблемы, связанные главным образом с инъекцией и выводом. Проблема вывода здесь особенно трудна, так как во избежание радиоактивных загрязнений камеры и дуантов циклотрона при столь больших токах вывод должен быть практически стопроцентным.

6. Поперечные кулоновские эффекты в циклотроне. Если плотность заряда в ионном пучке циклотрона $\rho < \rho_e$ и $\rho < \langle \rho_e \rangle$, то поведение частиц в сгустках зависит от ряда обстоятельств, в частности от начального распределения частиц по амплитудам и фазам бетатронных колебаний. При равномерном распределении частиц по фазам бетатронных

$$J \leq \frac{m\omega^3}{4\pi Ze} (Q_r^2 + Q_z^2) \cdot R \cdot \text{таб. (3)}$$

а при
уменьше
ρ?

колебаний отсутствуют когерентные колебания сгустка, и движение его центра тяжести происходит по идеальной спиральной траектории. Бетатронные колебания являются гармоническими, если результирующая упругая сила, равная сумме фокусирующих сил и кулоновского отталкивания, является линейной функцией отклонения частицы от радиуса орбиты и от плоскости орбиты. В соответствии с (5) это условие выполняется для сгустков с равномерной плотностью заряда и эллиптической формой поперечного сечения. Именно такие сгустки мы и будем рассматривать.

Результирующие формулы для безразмерных частот ν_r и ν_z , соответственно равных числам радиальных и аксиальных бетатронных колебаний за оборот, имеют вид

$$\nu_r = \sqrt{\nu_{r,0}^2 - \frac{4\pi\rho Ze}{m_0 A \omega^2} \cdot \frac{b}{a+b}} \approx \sqrt{\nu_{r,0}^2 - \frac{Z}{A} \cdot \frac{430J}{a(a+b)R}}; \quad (25)$$

$$\nu_z = \sqrt{\nu_{z,0}^2 - \frac{4\pi\rho Ze}{m_0 A \omega^2} \cdot \frac{a}{a+b}} \approx \sqrt{\nu_{z,0}^2 - \frac{Z}{A} \cdot \frac{430J}{b(a+b)R}}, \quad (26)$$

где ток J измеряется в амперах, а длины a , b , R — в сантиметрах.

На рис. 1 на фоне линий резонансов бетатронных колебаний изображены зависимости частот ν_r и ν_z от тока J пучка циклотрона при заданных размерах поперечного сечения пучка $a=0,2$ см, $b=0,5$ см в начале процесса ускорения, т. е. при $R=R_{\min}$. Эти зависимости изображены в виде одной кривой $\nu_z(\nu_r)$, значения тока J в ма указаны цифрами на этой кривой. Видно, что уменьшение частот бетатронных колебаний незначительно при заданном токе $J=0,1$ ма (величины $\Delta\nu_r/\nu_{r,0}$ и $\Delta\nu_z/\nu_{z,0}$ не превышают одного процента). Это обстоятельство, а также слабая зависимость частот $\nu_{r,0}$ и $\nu_{z,0}$ от R в рассматриваемом ускорителе позволяют пренебречь адиабатическим изменением амплитуд бетатронных колебаний и, следовательно, оправдывают сделанное ранее утверждение о том, что в спектро-

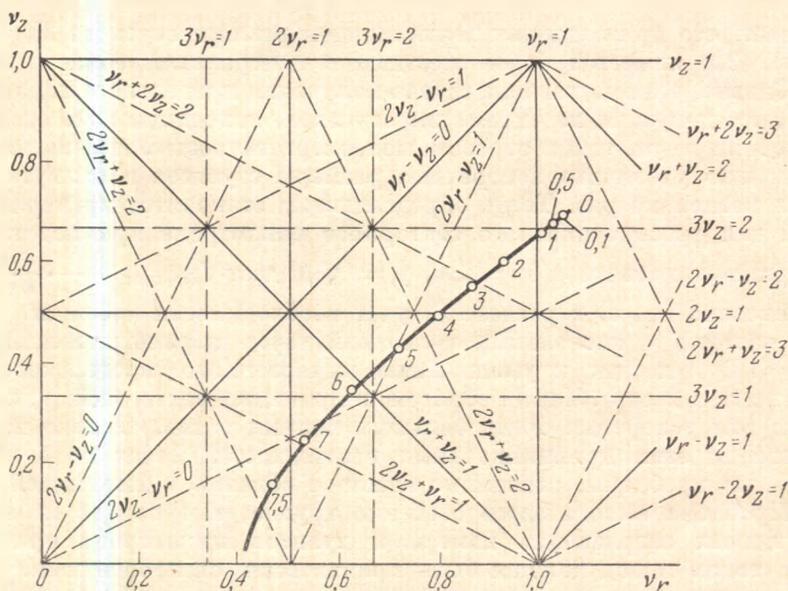


Рис. 1. Частоты бетатронных колебаний в спектрометрическом изохронном циклотроне

Цифры на кривой $\nu_z(\nu_r)$ показывают значения тока циклотронного пучка в ма. Сплошными прямыми линиями изображены резонансы первого и второго порядка, штриховыми прямыми — резонансы третьего порядка

метрическом циклотроне поперечные размеры сгустка a и b можно считать практически постоянными, не изменяющимися с ростом радиуса R орбиты.

По мере увеличения тока J частота радиальных бетатронных колебаний уменьшается вначале быстрее, чем частота аксиальных колебаний, и резонанс $\nu_r=1$ достигается раньше, чем резонанс $\nu_z=0,5$. Достижение резонанса $\nu_r=1$ является нежелательным, так как привело бы к увеличению радиальных размеров сгустков и вследствие этого к наложению сгустков, ускоряемых на смежных орбитах, недопустимому в спектрометрическом циклотроне.

Может показаться целесообразным задать ток J циклотрона столь большим, чтобы уйти от целочисленного резонанса в сторону $\nu_r < 1$ при $\nu_{r,0} > 1$. В действительности реализация этого предложения не привела бы к желаемому результату по следующей причине. Из (25) видно, что величина ν_r возрастает с ростом радиуса R . Кроме того, как было указано в разделе 3, взаимодействие зарядов соседних сгустков приводит при увеличении R к ослаблению радиальной составляющей электрического поля, что также ведет к увеличению безразмерной частоты ν_r радиальных бетатронных колебаний и приближает ее к значению $\nu_{r,0} > 1$ (которое к тому же, согласно [3], само слабо возрастает с ростом R). Сопутствующее этому процессу слабое адиабатическое затухание радиальных бетатронных колебаний не имеет существенного значения. Итак, оказывается, что если в начале ускорения, при $R=R_{\min}$, выбрать такое значение J , чтобы $\nu_r < 1$, то в конце ускорения, при $R=R_{\max}$, всегда получается $\nu_r > 1$. Следовательно, выбирая $\nu_r < 1$ при $R=R_{\min}$, невозможно избежать прохождения целочисленного резонанса $\nu_r=1$ при увеличении энергии ионов в процессе ускорения. Представляет интерес лишь возможность быстрого ухода частоты ν_r от резонанса $\nu_r=1$ или даже быстрого прохождения частоты ν_r через резонанс $\nu_r=1$ на самых начальных оборотах, при которых величина R изменяется относительно большими скачками. Но и в этом случае, очевидно, начальное значение ν_r не может далеко отстоять от единицы, иначе место прохождения через резонанс отодвинется в сторону больших радиусов и прохождение не будет быстрым. Итак, учитывая возможность ухода частоты ν_r в сторону увеличения вскоре после инжекции, принимаем в качестве условия при инжекции $\nu_r=1$. Тогда выражение для предельного тока в спектрометрическом циклотроне, обусловленного поперечными кулоновскими эффектами, имеет вид

$$J < J_{\max} = \frac{qa(a+b)R_{\min}^2 \varphi_0 m_0 \omega^3 (\nu_{r,0}^2 - 1)}{4\pi e} \cdot \frac{A}{Z} \approx 1 \text{ ма.} \quad (27)$$

Если бы проблема прохождения через целочисленный резонанс без увеличения радиальных размеров пучка была решена, то предел тока (27) мог бы быть увеличен до $J_{\max} \nu_{r,0}^2 / (\nu_{r,0}^2 - 1)$, т. е. до нескольких миллиампер.

Аналогично в секторном циклотроне (при отказе от моноэнергетичности выводимого пучка) из-за необходимости избежать прохождения частоты ν_z через параметрический резонанс $\nu_z=1/2$ величина предельного тока $J_{\langle e \rangle, \max}$ умножается на коэффициент $[1 - (0,5/\nu_{z,0})^2]$, т. е. уменьшается в 2 раза.

Изображенные на рис. 1 суммовые резонансы второго и третьего порядка $\nu_r + \nu_z = 1$, $2\nu_r + \nu_z = 2$ и $2\nu_z + \nu_r = 2$, как нетрудно показать, в рассмотренных двух вариантах циклотрона либо не имеют места, либо наступают при больших значениях тока, чем резонансы $\nu_r=1$ и $\nu_z=1/2$, и поэтому не накладывают ограничений на ток. Резонанс третьего по-

рядка $v_z = 2/3$ менее опасен. Тем не менее если считать его недопустимым, то предельный ток в спектрометрическом циклотроне будет равен $J_{\max} \times [v_{r,0}^2 / (v_{r,0}^2 - 1)] [1 - 4/9 v_z^2]$, а предельный ток при отказе от моноэнергетичности будет

$$J_{\langle e \rangle, \max} [1 - (v_z, \text{res} / v_z, 0)^2] \approx \frac{1}{9} J_{\langle e \rangle, \max}.$$

7. Продольный кулоновский эффект. По сравнению с поперечными кулоновскими эффектами в спектрометрическом изохронном циклотроне более существенным является продольный кулоновский эффект, поскольку он даже при заданном токе $J = 0,1 \text{ ма} \ll J_{\max}$ приводит к заметному энергетическому разбросу ионов в пучке. Это видно из следующей грубой оценки. Ионы, находящиеся на переднем краю сгустка, подвержены дополнительному ускорению и приобретают на одном обороте дополнительную энергию

$$\Delta W_1 = ZeE_{\max} 2\pi R \bar{k}. \quad (28)$$

Здесь $\bar{k} \approx 10$ — множитель, учитывающий действие соседних сгустков и отражений в стенках камеры и дуантов (как будет показано ниже, вклад соседних сгустков в продольное электрическое поле на порядок превышает продольную составляющую поля самого рассматриваемого сгустка). Подставляя значение E_{\max} из (6), находим $W_1 = Z \cdot 15 \text{ кэв/об}$. Такую же энергию недобирает за оборот ион, находящийся на противоположном краю сгустка. Изменения энергии, накапливающиеся на протяжении сотен оборотов, могут составить несколько процентов энергии частиц, выводимых из циклотрона, и в сотни раз превысить заданный допуск $\varepsilon = \Delta W / W < 10^{-4}$. Хотя приведенная оценка относится лишь к самым крайним частицам сгустка и ясно, что такие частицы, сильно отличающиеся по энергии от большинства остальных, составляют небольшой процент от всех частиц пучка, тем не менее, очевидно, что продольный кулоновский эффект может иметь большое значение для спектрометрического циклотрона. Ниже этот эффект рассматривается подробно.

8. Изменение энергии заряженной частицы в изохронном циклотроне под действием электростатических сил. Пусть частица с зарядом Ze движется в ускорителе по некоторой траектории L , и пусть одной из сил, действующих на частицу, является сила ZeE электростатического отталкивания со стороны других частиц. Полное изменение энергии частицы, обусловленное действием этой силы:

$$\Delta W = Ze \int_L E_\varphi(l) dl, \quad (29)$$

где l — текущая координата траектории частицы, а E_φ — проекция поля E на касательную к траектории (интеграл берется вдоль всей траектории L). Будем считать возмущение траектории силой ZeE достаточно малым, так чтобы при расчете интеграла (29) им можно было пренебречь. Кроме того, для конкретности предположим, что L состоит из системы $N = n_{\max}$ подобных кривых $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots, L_N$ -витков или орбит траектории и частица последовательно обходит эти орбиты с первой до последней, совершая на каждой один оборот. Тогда ΔW можно представить в виде

$$\Delta W = Ze \sum_{n=1}^N \bar{E}_\varphi(n) l_n, \quad (30)$$

где l_n — длина n -й орбиты, а $\bar{E}_\varphi(n)$ — среднее значение E_φ на этой орбите, т. е.

$$\bar{E}_\varphi = \frac{1}{l_n} \int_{L_n} E_\varphi dl. \quad (31)$$

Ниже для простоты будем считать, что $\vec{E}_\varphi(n)$ совпадает с E_φ и что сгусток движется по окружности, радиус которой равен среднему радиусу n -й орбиты:

$$R_n = \frac{1}{l_n} \int_{l_n} r_n(l) dl. \quad (32)$$

Заметим, что $l_n = 2\pi R_n$ только для круговых орбит; в общем случае положим $l_n = 2\pi' R_n$, где π' — некоторая постоянная, близкая к π .

Энергия частицы на n -й орбите в нерелятивистском приближении, очевидно, равна

$$W_n = \frac{m l_n^2 \omega^2}{8\pi^2} = \left(\frac{\pi'}{\pi}\right)^2 \frac{m R_n^2 \omega^2}{2}, \quad (33)$$

где ω — циклотронная частота. Отсюда, обозначая через ZeV энергию, полученную частицей за один оборот, и вводя обозначения

$$p = \frac{W_1}{ZeV} - 1, \quad R_0 = \frac{\pi}{\pi'} \sqrt{\frac{2N}{m\omega^2} ZeV}, \quad (34)$$

получим, что $W_n = (n+p) ZeV$ или

$$R_n = \frac{\pi}{\pi'} \sqrt{\frac{2(n+p)}{m\omega^2} ZeV} = \sqrt{\frac{n+p}{N}} R_0. \quad (35)$$

Нас будет интересовать относительное изменение энергии

$$\epsilon = \frac{\Delta W}{W_N} = \frac{2\pi'}{(N+p)V} \sum_{n=1}^N R_n E_\varphi(R_n). \quad (36)$$

Используемое нерелятивистское приближение существенно упрощает расчеты и облегчает изложение, в то же время поправки к величине ϵ , появляющиеся при учете релятивизма ионов, незначительны. Несущественными являются также поправки к продольной составляющей поля E_φ , обусловленные отличием формы реальных витков спиральной траектории от круговых орбит, и поправки, обусловленные отличием формы поперечного сечения сгустка от круга радиуса r , поскольку, как будет показано ниже, сами поправки, связанные с конечностью радиуса r сечения сгустка, являются очень малыми.

9. Азимутальная составляющая поля сгустка. Пусть r — радиус поперечного сечения сгустка, R' — радиус его орбиты, $2R\varphi_0$ — его длина и ρ — плотность пространственного заряда, причем $R'\varphi_0 \gg r_0$. Найдем потенциал $U(R, \varphi, z)$ в точке с цилиндрическими координатами R, φ, z . Центр системы цилиндрических координат пусть совпадает с центром ускорителя, азимут φ отсчитывается от середины сгустка, z — высота точки над плоскостью орбиты (рис. 2). Выражение для потенциала U имеет вид

$$U(R, \varphi, z) = R'\rho \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi' \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\vartheta \left\{ z^2 + (R - R')^2 + \right. \\ \left. + 4RR' \sin^2 \frac{\vartheta - \varphi'}{2} + 2r' [R' - R \cos(\varphi - \varphi')] \cos \vartheta - \right. \\ \left. - 2r'z \sin \vartheta + r'^2 \right\}^{-1/2}. \quad (37)$$

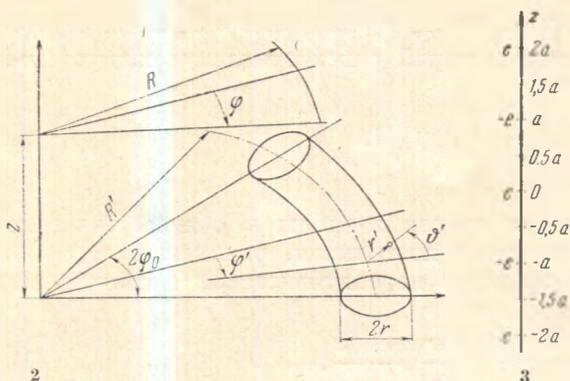


Рис. 2. Система координат, используемая в расчете электростатического поля сгустка ионов в циклотроне

Рис. 3. «Отражения» заряда в стенках дуантов и вакуумной камеры

Пренебрегая членами порядка r^4 и выполняя интегрирование по r' и θ' , имеем

$$U(R, \varphi, z) = \frac{Q}{2\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi'}{x(z, \varphi - \varphi')} \left[1 + \frac{r^2}{8x^2(z, \varphi - \varphi')} - \frac{3r^2 R^2 \sin^2(\varphi - \varphi')}{8x^4(z, \varphi - \varphi')} \right], \quad (38)$$

$$x(z, \varphi) = \left[(R - R')^2 + 4RR' \sin^2 \frac{\varphi}{2} + z^2 \right]^{1/2}. \quad (39)$$

(Для краткости вместо четырех аргументов функции x : z , φ , R и R' выписаны только два: z и φ .) Здесь Q — полный заряд сгустка:

$$Q = 2\pi\varphi_0 r^2 R' \rho. \quad (40)$$

Учтем теперь экранирующее действие стенок камеры и дуантов, на поверхности которых потенциал обращается в нуль. Для любого заряда Ze , расположенного в плоскости $z=0$, это можно сделать, введя фиктивные заряды так, как показано на рис. 3 (вверх и вниз заряды распространены до бесконечности). Тогда потенциал обращается в нуль при $z = \pm D/2$, т. е. величину D следует выбрать равной высоте дуанта¹. Поэтому потенциал сгустка в точке (R, φ) в плоскости равновесной орбиты можно представить в виде

$$U_{\text{эк}}(R, \varphi) = \frac{Q}{2\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi' \left\{ \frac{1}{x(0, \varphi - \varphi')} \left[1 + \frac{r^2}{8x^2(0, \varphi - \varphi')} - \frac{3r^2 R^2 \sin^2(\varphi - \varphi')}{8x^4(0, \varphi - \varphi')} \right] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{x(kD, \varphi - \varphi')} \left[1 + \frac{r^2}{8x^2(kD, \varphi - \varphi')} - \frac{3r^2 R^2 \sin^2(\varphi - \varphi')}{8x^4(kD, \varphi - \varphi')} \right] \right\}. \quad (41)$$

Отсюда азимутальная составляющая напряженности электрического поля сгустка с учетом экранировки

¹ Мы не рассматриваем влияние заряда, наведенного на боковые стенки дуантов и камеры, поскольку оно существенно только в течение очень короткого времени, когда сгустки движутся по своим последним орбитам; кроме того, как легко убедиться, эффект отражения от боковых стенок может лишь незначительно снизить значение продольной составляющей электрического поля, а следовательно, слегка уменьшить величину ε .

$$\begin{aligned}
 E_{\varphi}(R, \varphi) = & -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U_{\text{экр}}}{\partial \varphi} = \frac{Q}{2R\varphi_0} \left\{ \frac{1}{z(0, \varphi_0 - \varphi)} - \frac{1}{z(0, \varphi_0 + \varphi)} + \right. \\
 & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{z(kD, \varphi_0 - \varphi)} - \frac{1}{z(kD, \varphi_0 + \varphi)} \right] + \\
 & + \frac{r^2}{8} \left[\frac{1}{z^3(0, \varphi_0 - \varphi)} - \frac{1}{z^3(0, \varphi_0 + \varphi)} - \frac{3R^2 \sin^2(\varphi_0 - \varphi)}{z^5(0, \varphi_0 - \varphi)} + \frac{3R^2 \sin^2(\varphi_0 + \varphi)}{z^5(0, \varphi_0 + \varphi)} \right] + \\
 & + \frac{r^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{z^3(kD, \varphi_0 - \varphi)} - \frac{1}{z^3(kD, \varphi_0 + \varphi)} - \right. \\
 & \left. - \frac{3R^2 \sin^2(\varphi_0 - \varphi)}{z^5(kD, \varphi_0 - \varphi)} + \frac{3R^2 \sin^2(\varphi_0 + \varphi)}{z^5(kD, \varphi_0 + \varphi)} \right] \Big\}. \quad (42)
 \end{aligned}$$

10. Разброс энергии частиц пучка. Пусть в циклотроне по всем N орбитам синфазно движутся сгустки с одинаковыми Q и φ_0 . Тогда, учитывая (34)–(36), (39) и (42), относительное изменение энергии частицы с азимутом φ можно представить в виде

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{\pi'QN}{\varphi_0 VR_0} \left[A_1(\varphi) + \frac{r^2}{R_0^2} A_2(\varphi) \right] + O \left\{ \frac{r^4}{R_0^4} \left[\frac{1}{(\varphi_0 - \varphi)^4} - \frac{1}{(\varphi_0 + \varphi)^4} \right] \right\}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 A_i(\varphi) = & J_i(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, 0) + \\
 & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_i(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{kD}{R_0}), \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$J_i(\psi_1, \psi_2, u) = I_i(\psi_1, u) - I_i(\psi_2, u), \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
 I_1(\psi, u) = & \frac{1}{N(N+p)} \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \left[\left(\sqrt{\frac{n+p}{N}} - \sqrt{\frac{n'+p}{N}} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 4 \sqrt{\frac{n+p}{N} \cdot \frac{n'+p}{N}} \sin^2 \frac{\psi}{2} + u^2 \right]^{-1/2}, \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(\psi, u) = & \frac{1}{8N(N+p)} \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \left[\left(\sqrt{\frac{n+p}{N}} - \sqrt{\frac{n'+p}{N}} \right)^2 + 4 \sqrt{\frac{n+p}{N} \cdot \frac{n'+p}{N}} \times \right. \\
 & \left. \times \sin^2 \frac{\psi}{2} + u^2 \right]^{-3/2} \left[1 - \frac{3 \sin^2 \psi}{\left(1 - \sqrt{\frac{n'+p}{n+p}} \right)^2 + 4 \sqrt{\frac{n'+p}{n+p}} \sin^2 \frac{\psi}{2} + u^2 \frac{N}{N+p}} \right]. \quad (47)
 \end{aligned}$$

В квадратных скобках выражения (43) для $\varepsilon(\varphi)$ основным является член $A_1(\varphi)$, который не зависит от поперечного размера $2r$ сгустка. В сущности величина $A_1(\varphi)$ получена для сгустка, который представляет собою равномерно заряженную, бесконечно тонкую нить длиной $2R\varphi_0$. Поэтому, очевидно, величина $A_1(\varphi)$ стремится к бесконечности при $\varphi = \pm \varphi_0$, где рассматриваемый сгусток дает расходимость электрического поля. Поправки, представленные в виде бесконечного ряда по четным степеням r/R_0 , учитывают влияние конечного размера сечения сгустков и в целом устраняют расходимость поля на концах сгустка. Поэтому и величина $A_2(\varphi)$ должна иметь расходимость при $\varphi = \pm \varphi_0$.

Проанализируем полученные выражения. Сначала оценим величину $A_1(\varphi)$. Прежде всего заметим, что она очень слабо зависит от p , т. е. от начальной энергии частицы. Действительно, поскольку зависимость от p должна быть тем слабее, чем дальше плоскость соответствующего фиктивного заряда от плоскости орбиты, то наиболее сильно должна зависеть от p величина $J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, 0)$. Значения этой величины для случая

Т а б л и ц а 1

Сравнение точных (Т) и приближенных (П) значений функций $J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, 0)$

$\varphi, \text{ рад}$	$J_1 \text{ Т, } p=0$	$J_1 \text{ Т, } p=2,3$	$J_{1\text{П}}$ по формулам (54), (55)	δ
0,01	0,4718	0,4727	0,4695	0,00038
0,02	0,9547	0,9565	0,9500	0,00075
0,03	1,4610	1,4637	1,4538	0,00113
0,04	2,0066	2,0101	1,9966	0,00149
0,05	2,6140	2,6183	2,6008	0,00185
0,06	3,3191	3,3240	3,3019	0,00221
0,07	4,1877	4,1928	4,1645	0,00263
0,08	5,3671	5,3708	5,3318	0,00292
0,09	7,3389	7,3332	7,2587	0,00324

Примечание. Все выражения для $J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, 0)$, использованные при расчетах данной таблицы, содержат величины вида $2 \sin \frac{(\varphi_0 + \varphi)}{2}$ и $2 \sin \frac{(\varphi_0 - \varphi)}{2}$. Если воспользоваться малостью φ_0 и φ и заменить эти величины соответственно на $\varphi_0 + \varphi$ и $\varphi_0 - \varphi$, то значения J_1 (как точные, так и приближенные) уменьшатся на величину δ , приведенную в пятой колонке.

$\varphi_0=0,10$, $N=330$ при $p=0$ и $p=2,3$ как функция φ приведены во второй и третьей колонках табл. 1. Видно, что различие ничтожно мало. Поэтому при оценках мы ограничимся простейшим случаем $p=-1/2$. Для оценки величины $I_1(\psi, u)$ заменим в (46) суммирование по n и n' интегрированием. В результате получим

$$I_1(\psi, u) = \frac{1}{N(N - \frac{1}{2})} \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} dn \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} dn' \left[\left(\sqrt{\frac{n - \frac{1}{2}}{N}} - \sqrt{\frac{n' - \frac{1}{2}}{N}} \right)^2 + \sqrt{\frac{n - \frac{1}{2}}{N} \cdot \frac{n' - \frac{1}{2}}{N}} \Phi^2 + u^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (48)$$

где

$$\Phi = 2 \sin \frac{\psi}{2}. \quad (49)$$

Или, переходя к новым переменным интегрирования

$$y = \sqrt{\frac{n - \frac{1}{2}}{N}}, \quad y' = \sqrt{\frac{n' - \frac{1}{2}}{N}}, \quad (50)$$

имеем

$$I_1(\psi, u) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2N}} \int_0^1 y dy \int_0^1 y' dy' [(y - y')^2 + yy' \Phi^2 + u^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (51)$$

Учитывая, что подынтегральное выражение симметрично относительно y и y' , преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_1(\psi, u) &= \frac{8}{1 - \frac{1}{2N_0}} \int_0^1 y dy \int_0^y y' dy' [(y - y')^2 + yy'\Phi^2 + u^2]^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{8}{1 - \frac{1}{2N_0}} \int_0^1 y dy \left[\sqrt{y^2\Phi^2 + u^2} - \sqrt{y^2 + u^2} + \right. \\
 &\quad \left. + y \left(1 - \frac{\Phi^2}{2} \right) \ln \frac{2\sqrt{y^2\Phi^2 + u^2} + y\Phi^2}{2\sqrt{y^2 + u^2} - 2y + y\Phi^2} \right]. \quad (52)
 \end{aligned}$$

Его можно вычислить точно. Однако получаемое при этом выражение оказывается очень громоздким, и его неудобно использовать для расчета суммы по k в (44). Поэтому упростим этот интеграл, ограничиваясь практически важным случаем малых Φ и u . Тогда с точностью до членов порядка Φ^2 и u^4 (но учитывая члены порядка $\Phi^2 \ln \frac{1}{\Phi^2 + u^2}$) найдем

$$\begin{aligned}
 J_1(\psi, u) &= \frac{8}{1 - \frac{1}{2N_0}} \int_0^1 y dy \left\{ \sqrt{y^2\Phi^2 + u^2} - \sqrt{y^2 + u^2} + \frac{y^2\Phi^2}{2\sqrt{y^2\Phi^2 + u^2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{y}{2} \left(1 - \frac{\Phi^2}{2} \right) \ln \frac{4y^2 + 2u^2}{y^2\Phi^2 + u^2} \right\} = \\
 &= \frac{8}{1 - \frac{1}{2N_0}} \left\{ \frac{\sqrt{\Phi^2 + u^2}}{2} - \frac{(1 - u^2)^{3/2} - u^3 - \ln 2}{3} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Phi^2}{2} \right) \chi(u, \Phi) \right\}. \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi(u, \Phi) &= \int_0^1 y^2 dy \ln \frac{2y^2 + u^2}{y^2\Phi^2 + u^2} = \\
 &= \frac{1}{3} \left[\ln \frac{u^2 + 2}{u^2 + \Phi^2} + 2 \frac{u^2}{\Phi^2} \left(\frac{u}{\Phi} \arctg \frac{\Phi}{u} - 1 \right) + u^2 \left(1 - \frac{u}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}}{u} \right) \right]. \quad (54)
 \end{aligned}$$

Отсюда, согласно (45), тоже с точностью до членов порядка Φ^2

$$\begin{aligned}
 J_1(\psi_1, \psi_2, u) &= \frac{4}{1 - \frac{1}{2N_0}} \left[\sqrt{\psi_1^2 + u^2} - \sqrt{\psi_2^2 + u^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{\psi_1^2}{2} \right) \chi(u, \psi_1) - \left(1 - \frac{\psi_2^2}{2} \right) \chi(u, \psi_2) \right]. \quad (55)
 \end{aligned}$$

В табл. 1 и 2 приведены точные значения функций $J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, u)$ при $p=2,3$ и результаты расчетов по формулам (54), (55). Видно, что согласие вполне удовлетворительное.

Рассмотрим роль отдельных отражений заряда в стенках вакуумной камеры. На рис. 4 представлены значения $J_1(\varphi, u)$, вычисленные по формулам (45)–(47), где $u = kD/R_0$, для значения $D/R_0 = 0,015$. При $k=0$ имеем кривую $J_1(\varphi, 0)$, определяющую продольный кулоновский эффект без учета наведенных зарядов в стенках камеры. Так как расстояние между горизонтальными стенками невелико по сравнению с продольными размерами сгустков, то значения J_1 , полученные для отражений, имеют тот же порядок величины, что и $J_1(\varphi, 0)$, и убывают сравнительно медленно по мере роста номера отражения k . Хотя, согласно (44), величины $J_1(\varphi, k \frac{D}{R_0})$ входят в $A_1(\varphi)$ с чередующимися знаками, так что вклад отражений двух соседних порядков в продольный кулоновский эффект частично

Таблица 2

Точные (Т) и приближенные (II) (по формулам (54), (55)) значения функции $J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \alpha)$

φ	$\alpha = 0$		0,015		0,030		0,045		0,060		0,075		0,09	
	Т	II	Т	II	Т	II	Т	II	Т	II	Т	II	Т	II
0,01	0,472	0,469	0,445	0,441	0,386	0,382	0,324	0,317	0,261	0,258	0,211	0,208	0,171	0,168
0,02	0,956	0,949	0,897	0,890	0,775	0,768	0,641	0,635	0,521	0,514	0,420	0,414	0,339	0,333
0,03	1,463	1,453	1,367	1,356	1,170	1,160	0,982	0,952	0,777	0,768	0,625	0,616	0,504	0,495
0,04	2,009	1,995	1,862	1,848	1,575	1,561	1,281	1,268	1,028	1,015	0,824	0,812	0,663	0,652
0,05	2,617	2,599	2,396	2,378	1,990	1,972	1,596	1,580	1,270	1,254	1,013	0,998	0,815	0,800
0,06	3,322	3,300	2,982	2,959	2,441	2,390	1,901	1,881	1,498	1,479	1,190	1,172	0,955	0,938
0,07	4,190	4,162	3,635	3,606	2,830	2,805	2,186	2,163	1,706	1,685	1,351	1,330	1,084	1,064
0,08	5,368	5,329	4,551	4,518	3,222	3,193	2,437	2,410	1,887	1,863	1,491	1,468	1,197	1,175
0,09	7,330	7,255	5,063	5,025	3,538	3,506	2,635	2,605	2,034	2,007	1,608	1,582	1,294	1,269

φ	0,105		0,120		0,135		0,150		0,165		0,180	
	Т	II										
0,01	0,139	0,136	0,113	0,111	0,094	0,091	0,078	0,075	0,065	0,063	0,055	0,053
0,02	0,275	0,270	0,225	0,220	0,186	0,181	0,155	0,150	0,130	0,125	0,110	0,105
0,03	0,409	0,401	0,335	0,327	0,277	0,268	0,234	0,222	0,194	0,186	0,164	0,156
0,04	0,538	0,527	0,441	0,430	0,364	0,353	0,304	0,293	0,256	0,245	0,217	0,206
0,05	0,661	0,647	0,541	0,528	0,448	0,434	0,374	0,360	0,315	0,302	0,268	0,254
0,06	0,775	0,758	0,636	0,619	0,527	0,510	0,441	0,424	0,372	0,356	0,316	0,300
0,07	0,880	0,861	0,723	0,704	0,600	0,581	0,503	0,484	0,425	0,406	0,362	0,344
0,08	0,974	0,952	0,802	0,780	0,667	0,646	0,551	0,539	0,475	0,454	0,405	0,384
0,09	1,056	1,031	0,872	0,848	0,728	0,704	0,613	0,589	0,521	0,497	0,445	0,422

Примечание. При расчетах и выражениях для J_1 величины $2 \sin[(\varphi_0 - \varphi)/2]$ и $2 \sin[(\varphi_0 + \varphi)/2]$ были заменены соответственно на $\varphi_0 - \varphi$ и $\varphi_0 + \varphi$. Как видно из табл. 1, даже в наилучшем случае $\alpha = 0$ такая замена приводит к ничтожной ошибке.

компенсируется, тем не менее из-за медленного убывания этих величин их роль остается велика, и ряд сходится медленно. Эта ситуация наглядно иллюстрируется графиками $A_1(\varphi)$, приведенными на рис. 5 и 6. Видно, что учет отражений только первого порядка (или только нескольких порядков) иногда не позволяет даже получить правильный знак продольного кулоновского эффекта. При нечетном числе учитываемых отражений вместо реально существующего кулоновского отталкивания расчет дает притяжение практически на всей длине сгустка. По мере увеличения числа учитываемых отражений происходит весьма медленное расширение об-

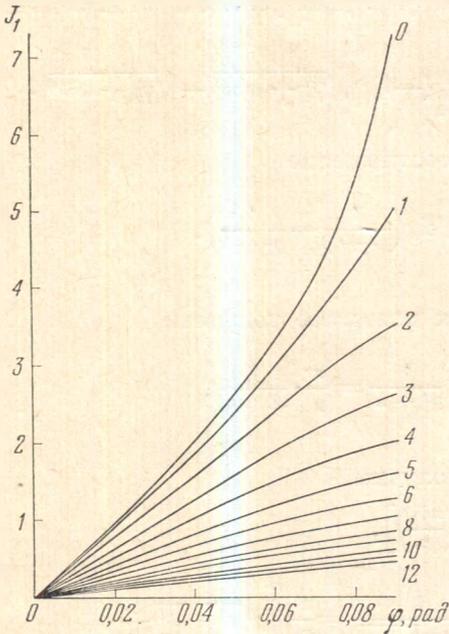


Рис. 4. Зависимость $J_1[\varphi, k (D/R_0)]$ для $D/R_0=0,015$

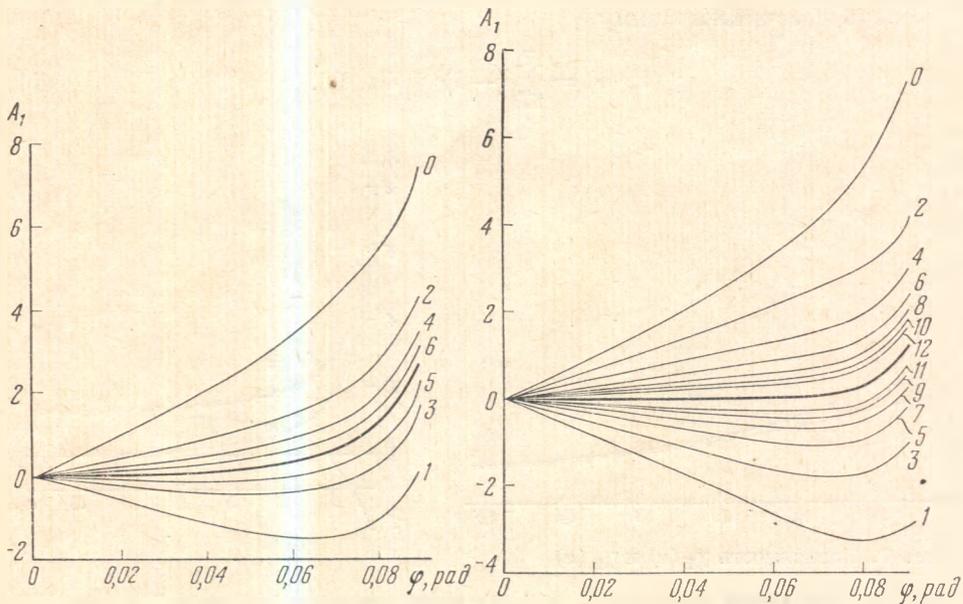
Цифрами на кривых указаны целочисленные значения k

Рис. 5. Зависимость $A_1(\varphi)$ с учетом k отражений заряда в стенках камеры

Цифрами на кривых указаны значения k ; $D/R_0=0,015$. Жирная линия изображает точные значения $A_1(\varphi)$

Рис. 6. Зависимость $A_1(\varphi)$ для $D/R_0=0,03$

Цифрами на кривых указано количество учтенных отражений заряда. Жирная линия изображает точные значения $A_1(\varphi)$



ластей, в которых оценка кулоновского эффекта имеет разумную точность. Эти области лежат на переднем и заднем краях сгустка.

Количество отражений, которые необходимо учитывать, можно оценить следующим образом. На рис. 7 представлены зависимости величин $\chi_1(u)$ и $\chi_2(u)$, входящие в формулу (55), а на рис. 8 — зависимости величин J_1 и A_1 от числа учтенных отражений, вычисленные для $\varphi=0,09$; $\varphi_0=0,1$, $D/R_0=0,015$. Видно, что даже для точки $\varphi/\varphi_0=0,9$, лежащей в области, где сходимость ряда наиболее быстрая, необходимо учитывать отражения до 35-го порядка для вычисления величины A_1 с точностью в несколько процентов. Поэтому возникает задача о нахождении аналитического выражения для сумм типа (44). Для решения этой задачи сначала рассмотрим величину

$$A_1'(\psi_1, \psi_2, u) = \psi_2 - \psi_1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{\psi_1^2 + u^2 k^2} - \sqrt{\psi_2^2 + u^2 k^2}). \quad (56)$$

Для этого используем очевидное соотношение

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} y^2 dy \left(\frac{1}{y^2 + \beta} - \frac{1}{y^2 + \alpha} \right). \quad (57)$$

Подставляя (57) в (56) и учитывая известное тождество

$$\frac{1}{y^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{y^2 + k^2} = \frac{\pi}{y} \cdot \frac{1}{\text{sh}(\pi y)}, \quad (58)$$

после несложных преобразований получим

$$A_1'(\varphi_1, \varphi_2, u) = \frac{u}{4} \left[f_1\left(\frac{\pi\psi_2}{u}\right) - f_1\left(\frac{\pi\psi_1}{u}\right) \right], \quad (59)$$

$$f_1(t) = \frac{8t^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{\sqrt{z^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\text{sh}(t\sqrt{1+z^2})} = \frac{8}{\pi^2} \int_t^{\infty} \sqrt{x^2 - t^2} \frac{dx}{\text{sh} x}. \quad (60)$$

Теперь рассчитаем сумму

$$\bar{\chi}(u, \Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \chi(ku, \Phi). \quad (61)$$

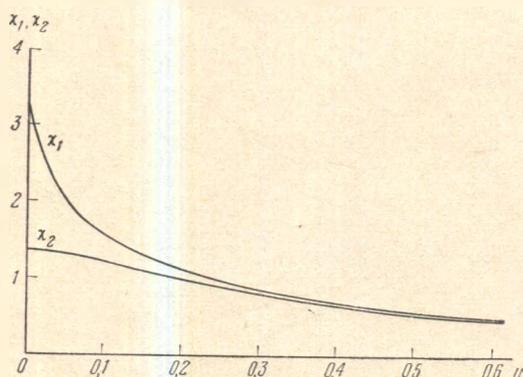


Рис. 7. Зависимость $\chi_1(u)$ и $\chi_2(u)$

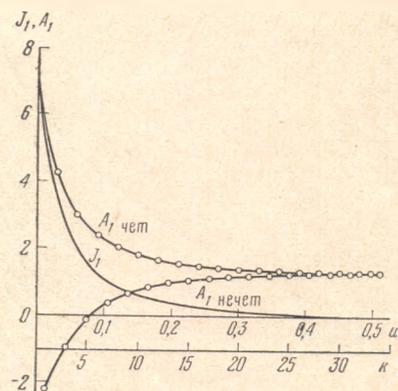
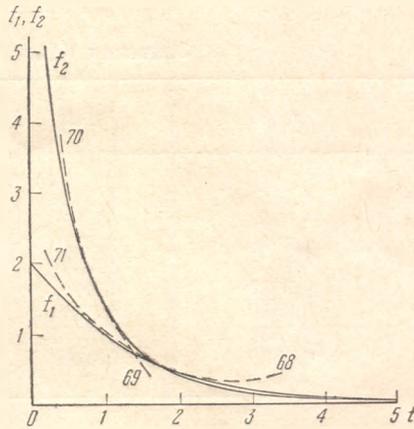


Рис. 8. Зависимость величин J_1 и A_1 от числа учтенных отражений заряда

Рис. 9. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, вычисленные по формулам (60) и (66)

Штриховыми линиями изображены приближенные значения f_1 и f_2 , вычисленные по формулам (68) — (71). Цифры на кривых указывают номер формулы



Используя (54), можно записать

$$\tilde{\chi}(u, \Phi) = \int_0^1 x^2 dx \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1 + \frac{x^2}{2u^2 k^2}}{1 + \frac{\Phi^2 x^2}{4u^2 k^2}} - \ln \frac{1 + \frac{2x^2}{(2k-1)^2 u^2}}{1 + \frac{\Phi^2 x^2}{(2k-1)^2 u^2}} \right]. \quad (62)$$

Наконец, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{y^2}{k^2} \right) \equiv \ln \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{k^2} \right) \right] = \ln \frac{\text{sh}(\pi y)}{\pi y}, \quad (63)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{4y^2}{(2k-1)^2} \right] \equiv \ln \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{4y^2}{(2k-1)^2} \right] \right\} = \ln [\text{ch}(\pi y)], \quad (64)$$

получим

$$\tilde{\chi}(u, \Phi) = \frac{1}{3} \ln \frac{\Phi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8} f_2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} u \right) + \frac{1}{8} f_2 \left(\frac{\pi \Phi}{2u} \right), \quad (65)$$

$$f_2(t) = -8 \int_0^1 x^2 dx \ln [\text{th}(tx)]. \quad (66)$$

Отсюда, согласно (44), (55) и (61), с точностью до членов порядка φ_0^2 получим

$$A_1(\varphi) = \frac{1}{1 - 2N} \left\{ \frac{D}{R_0} \left[f_1 \left(\pi R_0 \frac{\varphi_0 + \varphi}{D} \right) - f_1 \left(\pi R_0 \frac{\varphi_0 - \varphi}{D} \right) \right] + \left[1 - \frac{(\varphi_0 - \varphi)^2}{2} \right] f_2 \left(\pi R_0 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2D} \right) - \left[1 - \frac{(\varphi_0 + \varphi)^2}{2} \right] f_2 \left(\pi R_0 \frac{\varphi_0 + \varphi}{2D} \right) \right\}. \quad (67)$$

Значения функций f_1 и f_2 приведены в табл. 3. Кроме того, справедливы следующие приближенные соотношения: при $t \rightarrow 0$

$$f_1(t) = 2 \left[1 - \frac{2t}{\pi} + \frac{\ln 4}{\pi^2} t^2 + \frac{3}{8\pi^4} \zeta(3) t^4 + \frac{15}{64\pi^6} \zeta(5) t^6 + \dots \right], \quad (68)$$

Т а б л и ц а 3
Значения функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$

t	$f_1(t)$	$f_2(t)$	t	$f_1(t)$	$f_2(t)$
0,2	1,757	5,202	1,8	0,5355	0,4883
0,4	1,535	3,445	2,0	0,4549	0,3883
0,6	1,336	2,432	2,5	0,2998	0,2278
0,8	1,158	1,793	3,0	0,1954	0,1411
1,0	0,9989	1,349	3,5	0,1262	0,09190
1,2	0,8588	1,0293	4,0	0,08095	0,06256
1,4	0,7359	0,7946	4,5	0,05163	0,04427
1,6	0,6286	0,6199	5,0	0,03278	0,03238

где $\zeta(k)$ — дзета-функция Римана ($\zeta(3)=1,20206$, $\zeta(5)=1,0369$),

$$f_2(t) = \frac{8}{3} \left(\ln \frac{1}{t} + \frac{1}{3} + \frac{t^2}{5} - \frac{t^4}{30} \right), \quad (69)$$

и при $t \rightarrow \infty$

$$f_1(t) = \frac{8}{\pi^2} \sqrt{2\pi t} e^{-t} \left(1 + \frac{3}{8t} \right), \quad (70)$$

$$f_2(t) = \frac{\pi^4}{24} \cdot \frac{1}{t^3} - 8 \frac{e^{-2t}}{t} \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right), \quad (71)$$

Выражения (68)–(71) весьма точно описывают f_1 и f_2 во всей области изменения t : формула (69) справедлива с точностью лучше 1% при $t \leq 1$, а формула (71) — с точностью лучше 0,3% при $t \geq 1$; соответственно формула (68) справедлива при $t \leq 1$ с точностью лучше 10⁻⁴%, а формула (70) — с точностью лучше 3% при $t \geq 1$. Впрочем, благодаря малой величине отношения $D/R_0=9$ см/260 см (или 9 см/400 см), не нужно знать точные значения $f_1(t)$ для нахождения приближенных значений $A_1(\varphi)$ по формуле (67).

На рис. 9 приведены графики $f_1(t)$ и $f_2(t)$, вычисленные по формулам (60) и (66). Кроме того, штриховыми линиями изображены функции f_1 и f_2 , вычисленные по приближенным формулам (68)–(71). Видно, что штриховые кривые отходят от сплошных лишь за пределами областей применения формул (68)–(71).

Для точного расчета функции $A_1(\varphi)$ был использован следующий метод. Выражение (44) представлялось в виде

$$\begin{aligned} A_1(\varphi) = & J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, 0) - J_1^{(np)}(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, 0) - \\ & - \left[J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{D}{R_0}) - J_1^{(np)}(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{D}{R_0}) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{kD}{R_0}) - J_1^{(np)}(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{kD}{R_0}) - \right. \\ & \left. - \left[J_1(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{(k+1)D}{R_0}) - J_1^{(np)}(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{(k+1)D}{R_0}) \right] \right\} + \\ & + J_1^{(np)}(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, 0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_1^{(np)}(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{kD}{R_0}), \quad (44') \end{aligned}$$

где $J_1^{(np)}(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, u)$ определяется приближенной формулой (55). Последняя строка в (44'), согласно сказанному выше, равна приближен-

ному значению $A_1^{(np)}(\varphi)$, определенному формулой (67). В то же время разности

$$J_1\left(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{kD}{R_0}\right) - J_1^{(np)}\left(\varphi_0 - \varphi, \varphi_0 + \varphi, \frac{kD}{R_0}\right),$$

как видно из табл. 1 и 2, быстро убывают с ростом k . Поэтому ряд во второй и третьей строках формулы (44') оказывается очень быстро сходящимся при всех значениях φ , особенно если учесть его знакопеременный характер. Рассмотренная таким методом «точная» зависимость $A_1(\varphi)$ представлена на рис. 5 и 6 жирными линиями. В табл. 4 приведено сравнение точных и приближенных значений функции $A_1(\varphi)$. Видно, что различие невелико. В дальнейшем мы всюду вычисляем $A_1(\varphi)$ по приближенной формуле (67).

Т а б л и ц а 4

Сравнение точных (Т) и приближенных (По (67)) значений $A_1(\varphi)$

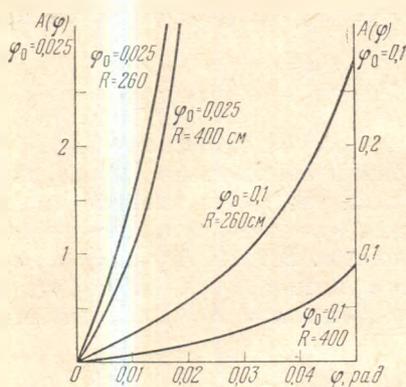
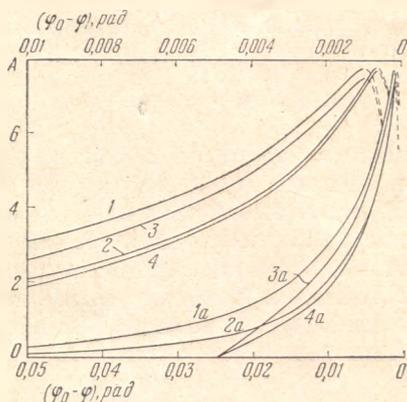
$\varphi, \text{ рад}$	$D/R_0 = 0,015$		$D/R_0 = 0,030$	
	Т	По (67)	Т	По (67)
0,01	0,0020	0,0022	0,0170	0,0174
0,02	0,0044	0,0049	0,0375	0,0383
0,03	0,0079	0,0087	0,0666	0,0676
0,04	0,0142	0,0151	0,1126	0,1138
0,05	0,0260	0,0272	0,1924	0,1935
0,06	0,0525	0,0538	0,3402	0,3410
0,07	0,1230	0,1237	0,6332	0,6322
0,08	0,3520	0,3484	1,2572	1,2502
0,09	1,2936	1,2611	2,7625	2,7241

Методом, аналогичным использованному при выводе формулы (67), была вычислена функция $A_2(\varphi)$ (см. приложение II), которая дает поправку к величине ε , существенную лишь на концах сгустков. Получилось

$$A_2(\varphi) = \frac{1}{(\varphi_0 + \varphi)^2} - \frac{1}{(\varphi_0 - \varphi)^2}. \quad (72)$$

При $r/R_0 = 0,3/400 \approx 10^{-3}$; $\varphi_0 = 0,10$; $\varphi_0 - \varphi = 0,01$ имеем $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{r^2}{R_0^2} \cdot \frac{A_2(\varphi)}{A_1(\varphi)} \approx 0,2\%$. Аналогично при $\varphi_0 = 0,100$; $\varphi_0 - \varphi = 0,001$, поправка составляет около 20% .

На рис. 10 представлена функция $A(\varphi) = A_1(\varphi) + \frac{r^2}{R_0^2} A_2(\varphi)$ для $\varphi_0 = 0,1$ и $\varphi_0 = 0,025$ (что в рассматриваемом циклотроне при условии $q\varphi_0 = 0,1$ соответствует кратностям $q=1$ и $q=4$) для параметров $D=9 \text{ см}$, $R_0=260$ и 400 см . Видно, что при малых значениях φ , т. е. вблизи середины сгустков ионов, функция $A(\varphi)$ возрастает с ростом φ при кратности 4 значительно быстрее, чем при кратности 1 (в 50—100 раз быстрее). Это явление связано с ходом зависимости $A(\varphi)$ на краю сгустка. Для удобства сравнения кривых мы изобразили на рис. 11 зависимость $A(\varphi_0 - \varphi)$ вместо $A(\varphi)$ в двух различных масштабах по оси абсцисс (например, кривые 1 и 1а). Кривые 1 и 3 вычислены для радиуса циклотрона $R_0=260 \text{ см}$ и значений кратности q , соответственно равных 1 и 4. Аналогично, кривые 2 и 4 построены для тех же значений q при условии $R_0=400 \text{ см}$. Кроме того, для всех кривых положено условие $\varphi_0 q = \text{const} = 0,1$, означающее независимость средней плотности заряда в сгустке от кратности q радиочастоты. Видно, что

Рис. 10. Зависимость $A(\varphi)$ вблизи середины ступка ионовРис. 11. Зависимость $A(\varphi_0 - \varphi)$ вблизи от края ступка ионов.

Верхняя шкала для кривых 1—4, нижняя — для 1а—4а:

Кривая	R_0	φ_0	q	Кривая	R_0	φ_0	q
1, 1а	260	0,100	1	3, 3а	260	0,025	1
2, 2а	400	0,100	1	4, 4а	400	0,025	1

вблизи от края спад кривых (при одинаковом значении R_0) слабо зависит от q . Этого и следовало ожидать, поскольку на краю ступка экранирование электрического поля металлическими стенками камеры проявляется слабее всего.

Одинаковостью хода $A(\varphi_0 - \varphi)$ вблизи края ступка объясняется отмеченное выше резкое различие хода кривых $A(\varphi)$ для различных значений q поблизости от середины ступка. Действительно, при одинаковой разности уровней $A(\varphi)$ между серединой и краем ступка средний наклон должен сильно зависеть от q (или от φ_0 при условии $\varphi_0 q = \text{const}$). Если учесть одинаковость наклона на весьма значительных интервалах вблизи краев, то различие наклонов вблизи $\varphi = 0$ должно резко усилиться.

В заключение этого раздела заметим, что изображенный штриховыми линиями спад кривых на рис. 11 при $\varphi_0 - \varphi \leq 10^{-3}$ означает, что в этой малой окрестности края ступка, составляющей всего лишь несколько процентов от его протяженности, становится существенным вклад отброшенных членов более высокого порядка, чем $A_2(\varphi)$. Впрочем, на таких малых расстояниях от края нужно учитывать истинное распределение заряда в ступке и проявляется неточность предположения о равномерном распределении заряда по длине ступка.

11. Моноэнергетичность циклотронного пучка. Кроме заданного допустимого энергетического разброса $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon} = 10^{-4}$, моноэнергетичность пучка ускоренных ионов можно охарактеризовать величиной η , равной доле всех частиц пучка, которую составляют ионы с энергией в пределах указанного разброса $\pm \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}$. Тогда

$$\eta = \bar{\varphi} / \varphi_0, \quad (73)$$

где $\bar{\varphi}$ — корень уравнения

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}. \quad (74)$$

Множитель $1/2$ возникает из-за того, что $A(\varphi)$ нечетная функция: $A(-\varphi) = -A(\varphi)$. С учетом (43) можно переписать (74) в виде

$$A(\varphi) = \varepsilon \frac{\varphi_0 V R_0}{2\pi q N} \approx \varepsilon \frac{R_{0(\text{м})} Z^2 e^2 V^2 (\text{кэВ/об})}{6W_{\text{max}} (\text{МэВ})} \frac{\varphi_0 q}{J_{(\text{ма})}}. \quad (75)$$

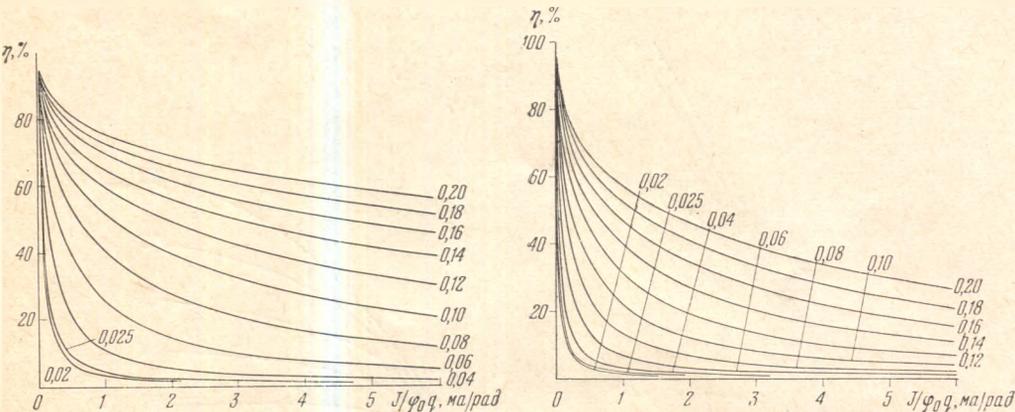


Рис. 12. Зависимость $\eta(J/\varphi_0q)$ для $R_0=400$, $D=9$, $eV=400$ кэв/об.
 Цифрами на кривых обозначены величины φ_0 . Ток J пучка циклотрона выражен в ма

Рис. 13. Зависимость $\eta(J/\varphi_0q)$ для $R_0=260$, $D=9$, $eV=400$ кэв/об.
 Цифрами на кривых обозначены величины φ_0 . Ток J пучка циклотрона дан в ма

На рис. 12 приведена серия кривых, иллюстрирующих зависимость η от параметра $J(\text{ма})/\varphi_0q$ для рассматриваемого циклотрона ($R_0=400$ см). Цифрами на кривых указаны значения φ_0 . Аналогичные графики, построенные для $R_0=260$ см, приведены на рис. 13. В частности, для тока $J=100$ мка с учетом условия $q\varphi_0=0,1$ находим в случае $R_0=400$ см значения $\eta=0,52$ для $q=1$ и $\eta=0,05$ для $q=4$. Столь большое влияние кратности объясняется отмеченной в предыдущем разделе резкой зависимостью функции $A(\varphi)$ от азимутальной протяженности сгустка. Аналогичным образом находим для $R_0=260$ см, что при $q=1$ величина $\eta=0,22$, тогда как при $q=4$ имеем $\eta=0,025$. Зависимость величины η от радиуса R_0 циклотрона объясняется двумя причинами. Во-первых, это уменьшение плотности заряда в сгустке при увеличении R_0 , во-вторых — усиление экранирующего действия горизонтальных стенок камеры при уменьшении отношения D/R_0 и, следовательно, отношения апертуры D к длине сгустка $2R_0\varphi_0$. Отмеченное увеличение коэффициента η более чем в 2 раза является важным аргументом для выбора большего из двух рассмотренных значений радиуса циклотрона.

По вычисленным значениям η были построены приведенные на рис. 14 и 15 зависимости величин $\eta J/\varphi_0q$ от J/φ_0q для различных значений φ_0 и R_0 . Эти графики показывают, как возрастает полезный ток ηJ (т. е. ток ускоренных ионов, удовлетворяющих требованию моноэнергетичности) при увеличении полного тока J циклотронного пучка. Видно, что для принятых значений параметров циклотрона увеличение циклотронного тока до величин, существенно превышающих выбранное значение $J=100$ мка, нецелесообразно из-за нелинейного, насыщающегося хода зависимости ηJ от J .

12. Влияние сдвига фаз между гармониками ускоряющего напряжения. Рассмотренный продольный кулоновский эффект может быть частично компенсирован при введении регулируемого сдвига фаз между основной частотой и третьей (или второй) гармоникой напряжения на дуантах, используемой в спектрометрическом циклотроне для уплощения формы кривой ускоряющего напряжения. Этот сдвиг фаз приводит к приблизительно линейной зависимости отклонений энергии иона от его фазы, т. е. от положения иона в сгустке. Используя графики рис. 10 и 11, нетрудно

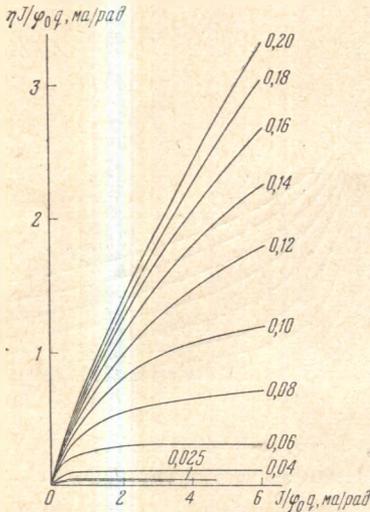


Рис. 14. Зависимость $\eta J / \varphi_0 q$ от $J / \varphi_0 q$ для $R_0 = 400$ см
Цифры у кривых φ_0 в рад. Ток J пучка циклотрона — в ма.

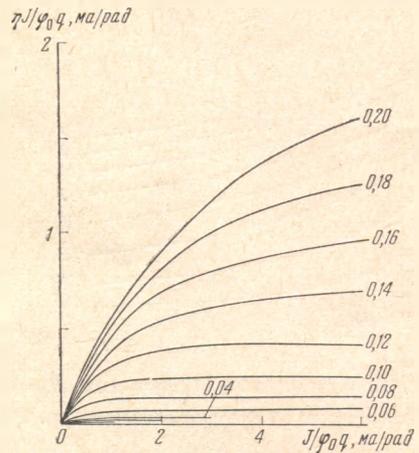


Рис. 15. Зависимость $\eta J / \varphi_0 q$ от $J / \varphi_0 q$ для $R_0 = 260$ см
Цифры у кривых — φ_0 в рад. Ток J пучка циклотрона — в ма

убедиться, что компенсация зависимости $A(\varphi)$ линейной функцией, позволяет существенно увеличить коэффициент η лишь в тех случаях, когда он очень мал, и оказывается малоэффективной при значительных величинах η . Так, например, ориентировочные расчеты показывают, что для $q=4$ использование сдвига фаз позволяет довести значение η до 52% при $R_0=400$ см или до 41% при $R_0=260$ см, в то время как при $q=1$ величина η при оптимальном сдвиге фаз возрастает для $R_0=400$ см до 70% и для $R_0=260$ см до 56%.

При осуществлении некоторых физических экспериментов нежелательна даже небольшая примесь ионов с энергиями, лежащими за пределами заданного разброса. Поэтому необходимо обеспечить удаление концов сгустков ионов, выводимых из циклотрона.

В заключение авторы выражают благодарность И. Я. Бариту за полезные замечания и советы.

Приложение I

ПОЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Рассчитаем поле на поверхности бесконечного эллиптического цилиндра с однородной плотностью заряда ρ . Пусть полуоси эллипса по осям x и z равны соответственно a и b . Тогда потенциал, создаваемый таким зарядом, имеет вид

$$\varphi(x, z) = \rho \int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b dz' \ln \frac{1}{(x-x')^2 + (z-z')^2}. \quad (I. 1)$$

Рассмотрим составляющую напряженности поля по оси z вне цилиндра в непосредственной близости от его границы, т. е. при

$$x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1 + \delta \quad (0 < \delta \ll 1). \quad (I. 2)$$

Ее можно представить в виде

$$E_1(x, z) \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho \int_{-a}^a dx' \int_{-b\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}} dz' \frac{\partial}{\partial z'} \ln \frac{1}{(x-x')^2 + (z-z')^2} =$$

$$= \rho \int_{-a}^a dx' \ln \frac{(x-x')^2 + \left(z + b\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}\right)^2}{(x-x')^2 + \left(z - b\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}\right)^2}. \quad (1.3)$$

Для вычисления этого интеграла перейдем к новым переменным

$$x = a \cos \psi, \quad x' = a \cos \psi', \quad b/a = \varepsilon, \quad \delta + \sin^2 \psi = \sin^2 \varphi. \quad (1.4)$$

При этом $\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}} = \sin \psi'$, $z = b \sin \varphi$, и

$$E_z = a\rho \int_0^\pi \sin \psi' d\psi' \ln \frac{(\cos \psi' - \cos \psi)^2 + \varepsilon^2 (\sin \psi' + \sin \varphi)^2}{(\cos \psi' - \cos \psi)^2 + \varepsilon^2 (\sin \psi' - \sin \varphi)^2} =$$

$$= a\rho \int_0^\pi \sin \psi' d\psi' \ln \frac{\sin^2 \frac{\psi' + \psi}{2} \sin^2 \frac{\psi' - \psi}{2} + \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\psi' + \varphi}{2} \cos^2 \frac{\psi' - \varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\psi' + \psi}{2} \sin^2 \frac{\psi' - \psi}{2} + \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\psi' + \varphi}{2} \sin^2 \frac{\psi' - \varphi}{2}}. \quad (1.5)$$

Когда δ стремится к нулю, $\varphi \rightarrow \psi$. В силу непрерывности такой предельный переход можно провести непосредственно в подынтегральном выражении. В результате

$$E_z = a\rho \int_0^\pi \sin \psi' d\psi' \ln \frac{\sin^2 \frac{\psi + \psi'}{2} \left[\sin^2 \frac{\psi - \psi'}{2} + \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\psi - \psi'}{2} \right]}{\sin^2 \frac{\psi - \psi'}{2} \left[\sin^2 \frac{\psi + \psi'}{2} + \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\psi + \psi'}{2} \right]} =$$

$$= a\rho \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \ln \left[\frac{1 - \cos(\varphi + \psi)}{1 - \cos(\varphi - \psi)} \frac{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \cos(\varphi - \psi)}{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \cos(\varphi + \psi)} \right] =$$

$$= a\rho \int_{-\psi}^{\pi-\psi} \sin(\varphi + \psi) d\varphi \ln \frac{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \cos \varphi}{1 - \cos \psi} +$$

$$+ a\rho \int_{\psi}^{\pi+\psi} \sin(\varphi - \psi) d\varphi \ln \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \cos \varphi}. \quad (1.6)$$

Заменяя в первом интеграле переменную интегрирования на $\varphi' = \pi - \varphi$, получим

$$E_z = a\rho \int_{\psi}^{\pi+\psi} \sin(\varphi - \psi) d\varphi \left[\ln \frac{1 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \cos \varphi}{1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \cos \varphi} + \ln \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right] =$$

$$= a\rho \left[\Phi\left(\psi, \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1}\right) + \Phi(\psi, 1) \right], \quad (1.7)$$

где

$$\Phi(\psi, \alpha) = \int_{\psi}^{\pi+\psi} \sin(\varphi - \psi) d\varphi \ln \frac{1 - \alpha \cos \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi}. \quad (I. 8)$$

Интеграл $\Phi(\psi, \alpha)$ удобно вычислять интегрированием по частям

$$\begin{aligned} \Phi(\psi, \alpha) &= -\cos(\varphi - \psi) \ln \frac{1 - \alpha \cos \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} \Big|_{\psi}^{\pi+\psi} + 2\alpha \int_{\psi}^{\pi+\psi} \frac{\cos(\varphi - \psi) \sin \varphi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2\alpha \int_{\psi}^{\pi+\psi} \frac{\cos(\varphi - \psi) \sin \varphi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 2\alpha \cos \psi \int_{\psi}^{\pi+\psi} \frac{\cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \varphi} + \\ &+ 2\alpha \sin \psi \int_{\psi}^{\pi+\psi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (I. 9)$$

Как легко проверить, первый интеграл в (I. 9) равен нулю. Во втором интеграле подынтегральная функция на интервалах $(0, \psi)$ и $(\pi, \pi + \psi)$ совпадает. В итоге $\Phi(\psi, \alpha)$ можно представить в виде

$$\Phi(\psi, \alpha) = 2\alpha \sin \psi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \varphi}. \quad (I. 10)$$

При $\alpha = 1$ интеграл вычисляется сразу и равен $2\pi \sin \psi$. При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\Phi(\psi, \alpha) = \frac{2\pi \sin \psi}{\alpha} \left[1 - (1 - \alpha^2) \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - \alpha^2 \cos^2 \varphi} \right] \quad (I. 11)$$

или

$$\Phi(\psi, \alpha) = \frac{2\pi \sin \psi}{\alpha} (1 - \sqrt{1 - \alpha^2}). \quad (I. 12)$$

И окончательно, подставляя (I. 12) в (I. 7), имеем, учтя (I. 4),

$$E_z(x, z) = 4\pi\varrho \frac{a}{b+a} z. \quad (I. 13)$$

Аналогично

$$E_x(x, z) = 4\pi\varrho \frac{b}{b+a} x. \quad (I. 14)$$

Приложение II

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ $A_2(\varphi)$

Как было отмечено в разделе 10, величина $(r^2/R_0^2)A_2(\varphi)$ может внести заметную поправку в $\epsilon(\varphi)$ лишь на концах сгустка, так что выражение для $A_2(\varphi)$ представляет интерес только на краю заряженной области, где рассматриваемый сгусток дает расходимость, а остальные сгустки и тем более отражения дают конечный вклад в $\epsilon(\varphi)$. Поэтому для оценки $A_2(\varphi)$ достаточно вычислить $I_2(\psi, u)$ для $u=0$, $\psi \rightarrow 0$.

Заменим в (47) суммирование интегрированием, положим $u=0$ и перейдем к новым переменным $y = \sqrt{\pi/N}$, $y' = \sqrt{\pi'/N}$. Тогда, производя преобразования, аналогичные (48)–(51), и считая $\frac{1}{1 - \frac{1}{2N}} \approx 1$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 I_2(\psi, 0) &= \frac{1}{2} \int_0^1 y dy \int_0^1 y' dy' \left[1 - \frac{3\psi^2 y^2}{(y-y')^2 + \psi^2 y y'} \right] [(y-y')^2 + \psi^2 y y']^{-\frac{3}{2}} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 y dy \int_0^1 y' dy' \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\psi^2 (y^2 + y'^2)}{(y-y')^2 + \psi^2 y y'} \right] [(y-y')^2 + \psi^2 y y']^{-\frac{3}{2}}. \quad (11.1)
 \end{aligned}$$

Используя симметрию подынтегральной функции относительно переменных y и y' и производя замену переменных $y' = yz$, получаем (аналогично (52))

$$\begin{aligned}
 I_2(\psi, 0) &= \int_0^1 y dy \int_0^1 y' dy' \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\psi^2 (y^2 + y'^2)}{(y-y')^2 + \psi^2 y y'} \right] [(y-y')^2 + \psi^2 y y']^{-\frac{3}{2}} = \\
 &= \int_0^1 y dy \int_0^1 y^2 z dz \frac{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\psi^2 (1+z^2) y^2}{(1-z)^2 y^2 + \psi^2 z y^2}}{y^3 [(1-z)^2 + \psi^2 z]^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \int_0^1 z dz \frac{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\psi^2 (1+z^2)}{(1-z)^2 + \psi^2 z}}{[(1-z)^2 + \psi^2 z]^{\frac{3}{2}}}. \quad (11.2)
 \end{aligned}$$

Этот интеграл можно вычислить точно, но получающееся выражение неудобно для анализа. Нас интересует величина этого интеграла при $\psi \rightarrow 0$. Тогда в него основной вклад дает область $z \rightarrow 1$. Знаменатель подынтегрального выражения при этом стремится к ψ^3 . Поэтому приближенно можно записать, заменяя z на 1:

$$I_2(\psi, 0) = \int_0^1 dz \frac{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2\psi^2}{(1-z)^2 + \psi^2}}{[(1-z)^2 + \psi^2]^{\frac{3}{2}}} \approx \int_0^1 dy \frac{1 - \frac{3\psi^2}{y^2 + \psi^2}}{[y^2 + \psi^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (11.3)$$

Здесь произведена замена переменных $1-z=y$. Кроме того, учтено, что $\psi \ll 1$, поэтому расширение пределов интегрирования не меняет величины $I_2(\psi, 0)$. Переходя к новой переменной t по формуле $y = \psi t$, имеем

$$I_2(\psi, 0) = \frac{1}{\psi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3}{t^2 + 1} \right) = -\frac{1}{\psi^2}. \quad (11.4)$$

Отсюда в той области, где A_2 может быть заметно отлична от нуля,

$$A_2(\varphi) = \frac{1}{1(\varphi_0 + \varphi)^2} - \frac{1}{(\varphi_0 - \varphi)^2}. \quad (11.5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Reiser*. IEEE Trans. Nucl. Sci., 13, 171 (1966).
2. Материалы рабочего совещания по моноэнергетическому циклотрону ОИЯИ. Препринт В-4496. Дубна, 1969.
3. *И. Я. Барит* и др. Труды VII Международной конференции по ускорителям (Ереван, 1969), 1. Ереван, изд-во АН АрмССР, 1970, стр. 324.
4. *I. Ya. Barit et al.* Proc. of V Internat. Cyclotron Conf. Oxford, 1969; Butterworths, London, 1971, p. 375.

Ю. К. ХОХЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ
В ИЗОХРОННОМ СЕКТОРНОМ ЦИКЛОТРОНЕ

Обозначения

- r, φ, t — полярные координаты и время;
 $r(\varphi), t(\varphi)$ — траектория и время движения по ней;
 $R(\varphi), T(\varphi)$ — опорная траектория и время движения по ней;
 K — кривизна траектории в магнитном поле;
 $K_0 = \omega_0/v$ — переводный множитель;
 ω_0 — частота обращения частицы;
 $\tau(\vartheta), x(\vartheta)$ — малые временное и пространственное отклонения от опорной траектории;
 $X(\vartheta)$ — столбец из $x(\vartheta), y(\vartheta) \equiv x'(\vartheta)$;
 $X(\vartheta)$ — столбец из $\tau(\vartheta), x(\vartheta), y(\vartheta)$;
 $M(\vartheta | \vartheta_0), M_f(\vartheta | \vartheta_0)$ — матрица движения и матрица Флоке;
 $a(\vartheta), \beta(\vartheta), \rho(\vartheta)$ — действительные амплитуды Флоке;
 $\sigma(\vartheta, \vartheta_0)$ — фаза Флоке;
 n, k — абсолютное число оборотов; число оборотов;
 ν_x — число радиальных бетатронных колебаний на один оборот;
 $\mu = 2\pi(\nu_x - 1)$ — частота прецессии;
 D — характерная длина;
 $\chi_2 = H_2/H_1$ — отношение магнитных полей в промежуточном и магнитном секторах в ступенчатой модели;
 $\varphi_{1,2}, \nu_{1,2}, \alpha, N, N_a$ — углы, относящиеся к ступенчатой модели;
 N, N_a — число секторов и число щелей.

Под теорией траекторий в циклотроне часто подразумевается динамика замкнутых орбит, существующих лишь в отсутствие электрического поля [1]. Между тем имеется ряд актуальных вопросов, для решения которых нужна более полная теория, принимающая во внимание как свойства траекторий в магнитном поле, так и главные эффекты, связанные с ускорением. В настоящей работе излагается один из возможных вариантов такой теории. Он состоит в том, что щели полагаются бесконечно узкими, после чего их действие на траекторию сводится к граничным условиям. Последние учитываются (в линейном приближении) вполне точно. Соответствующие решения, рассматриваемые как функции числа оборотов, выражаются через амплитуды и фазы трехмерного представления Флоке. Аперриодичность, вносимая ускорением и другими факторами, учитывается в адиабатическом приближении.

Найденные общие уравнения применяются к проектируемому спектрметрическому циклотрону [2] (см. также [3—5]). Для получения окончательных результатов в виде простых аналитических формул привлекается ступенчатая модель.

Ускорение частиц в циклотроне [2] осуществляется двумя 45-градусными дуантами, расположенными в промежутках между магнитами. В такой системе каждая ускоряющая щель имеет как продольную (вдоль равновесной орбиты), так и поперечную (перпендикулярную к равновесной орбите) составляющие электрического поля. Соответственно имеются продольный и поперечный эффекты, которые в свою очередь подразделяются на внешний (возбуждение колебаний внешней силой) и внутренний (параметрическое влияние на бетатронные колебания). Проведенные расчеты показывают, что внешний эффект может быть исключен путем специального выбора начальных условий. Траектории, отвечающие этим условиям, называются идеальными. Они 1) представляют собой равномерно разворачивающиеся спирали, не имеющие обычных сгущений и разрежений; 2) взаимно синхронны; 3) образуют естественную систему координатных линий, используемую для описания остальных эффектов.

Внутренние эффекты представляют интерес главным образом в связи с вопросом о щелевом параметрическом резонансе [6]. Расчеты показывают, что продольный эффект усиливает фокусировку (увеличивает частоту бетатронных колебаний), в то время как поперечный эффект ее ослабляет. Так как вклад продольного эффекта больше или порядка вклада поперечного эффекта, то опасность сильной дефокусировки (параметрический резонанс) исключается.

Следующая отличительная особенность выбранной дуантной системы состоит в том, что рабочие фазы ускоряющего потенциала $U(t)$ соответствуют склонам, а не экстремумам функции $U(t)$. В результате электрическое поле щели успевает существенно измениться за время прохождения сгустка. Это приводит к специфическому влиянию фазовых колебаний на бетатронные (эффект непостоянства ускорения). В работе исследовано влияние непостоянства ускорения на бетатронные колебания вообще и на энергетическое распределение частиц пучка в частности. Заслуживает внимания обнаруженное возрастание энергетического разброса, пропорциональное логарифму энергии (параметрический резонанс синхротронных колебаний). Численные оценки показывают, что при выбранных значениях параметров [2] этот резонанс дает на выходе около 10% от допустимого энергетического разброса $\sim 10^{-4}$.

1. Бетатронные колебания около опорных траекторий $R(\varphi)$ и $R_e(\varphi)$. Идеальные траектории $R_e(\varphi)$. Рассматривается движение частицы в плоскости $z=0$ цилиндрической системы координат r, φ, z . Предполагается, что ускоряющие щели имеют пренебрежимо малую ширину и расположены радиально. В этом случае движение описывается уравнением

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathcal{H}) \tag{1.1}$$

вне щелей и граничными условиями

$$\Delta p = \sqrt{(m + m_0)(W + \Delta W)} - \sqrt{(m + m_0)W}, \quad \Delta p_r = 0, \quad \Delta r = 0 \tag{1.2}$$

на щелях. $W = (m + m_0)^{-1} p^2$ — кинетическая энергия; ΔW — заданный прирост энергии. В выражении для Δp опущена ничтожно малая поправка порядка $\Delta m/m$.

Второе из граничных условий (1.2) может быть заменено на

$$\left(\frac{p_r}{p_\varphi}\right)_{j_+} = \left\{ 1 + \left[\frac{2\Delta p}{p} + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{p_r}{p_\varphi}\right)^2 \right] \right\}^{-1/2} \left(\frac{p_r}{p_\varphi}\right)_j.$$

Здесь j — номер щели; индексы j и j_+ отмечают соответственно входные и выходные значения; $\Delta p_j = p_{j_+} - p_j$ и т. п.

Интересующие нас эффекты имеют наибольшую величину в области, где релятивистские поправки заведомо несутельственны. Поэтому можно положить $W = p^2/2m_0$. Вместе с тем практически всюду выполняется условие $\Delta W/W \ll 1$, при котором первое из граничных условий (1.2) переходит в

$$\Delta p/p = \Delta W/2W. \quad (1.3)$$

В линейном по $\Delta p/p$ приближении остальные два граничных условия принимают вид

$$\left(\frac{p_r}{p_\varphi}\right)_{j+} = \left\{1 - \frac{\Delta p}{p} \left[1 + \left(\frac{p_r}{p_\varphi}\right)^2\right]\right\}_j \left(\frac{p_r}{p_\varphi}\right)_j, \quad \Delta r_j = 0. \quad (1.4)$$

Переходя в (1.1), (1.4) от t к независимой переменной φ и учитывая, что $p_r/p_\varphi = r'/r$, получим

$$\begin{aligned} \left\{\frac{r'}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}' - \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-1/2} + K(r, \varphi)r = 0, \\ \left(\frac{r'}{r}\right)_{j+} = \left\{1 - \frac{\Delta p}{p} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]\right\}_j \left(\frac{r'}{r}\right)_j, \quad \Delta r_j = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

или в других обозначениях

$$\begin{aligned} \psi'(\varphi) = 1 - K(r, \varphi)r(\varphi)/\cos \psi(\varphi), \quad r'(\varphi) = r(\varphi) \operatorname{tg} \psi(\varphi); \\ \operatorname{tg} \psi_{j+} = (1 - \Delta p/p \cos^2 \psi)_j \operatorname{tg} \psi_j, \quad \Delta r_j = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $K(r, \varphi)$ — кривизна траектории $r(\varphi)$ в магнитном поле $\mathcal{H} = e \mathcal{H}_z(r, \varphi)$; $\mathcal{H}_z(r, \varphi) < 0$.

В полярно-натуральной системе координат [7] положение частицы с импульсом p отсчитывается от соответствующей (принадлежащей тому же p) опорной траектории $R(\varphi)$ по формуле

$$r(\varphi) = R(\varphi) + \frac{x(\vartheta)}{\cos \Psi(\varphi)}, \quad (1.7)$$

где $\vartheta = \vartheta(\varphi)$ — обобщенный азимут, определяемый соотношением

$$\frac{d}{d\varphi} = \frac{K_0 R(\varphi)}{\cos \Psi(\varphi)} \cdot \frac{d}{d\vartheta}, \quad \operatorname{tg} \Psi(\varphi) = \frac{R'(\varphi)}{R(\varphi)}, \quad K_0 = \frac{\omega_0}{v};$$

ω_0 — частота обращения частицы по опорной траектории. Разлагая уравнения (1.5) по степеням $x(\vartheta)$ и удерживая члены нулевого и первого порядка, получим

$$\begin{aligned} (\sin \Psi(\varphi))' - \cos \Psi(\varphi) + KR(\varphi) + K_0^2 R(\varphi)[x'(\vartheta) + u^2(\vartheta)x(\vartheta)] = 0; \\ \left(R + \frac{x}{\cos \Psi}\right)_{j+} = \left(R + \frac{x}{\cos \Psi}\right)_j, \quad \left[\operatorname{tg} \Psi + \frac{1}{\cos^3 \Psi} (K_0 x' \cos \Psi - Kx \sin \Psi)\right]_{j+} = \\ = \left\{\left(1 - \frac{\Delta W}{2W \cos^2 \Psi}\right) \operatorname{tg} \Psi + \frac{1}{\cos^3 \Psi} \left[1 - (1 + 2 \sin^2 \Psi) \frac{\Delta W}{2W \cos^2 \Psi}\right] \times \right. \\ \left. \times (K_0 x' \cos \Psi - Kx \sin \Psi)\right\}_j; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$K \equiv K(R(\varphi), \varphi); \quad u^2(\vartheta) = \frac{1}{K_0^2} \left[K^2 + \cos \Psi(\varphi) \frac{\partial K}{\partial R} - \sin \Psi \frac{\partial K}{\partial \varphi} \right].$$

В натуральной системе координат положение частицы отсчитывается от опорной траектории $R(\varphi)$ по формуле

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{n}x, \quad (1.9)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к траектории $R(\varphi)$. Угол φ

в этом случае является азимутом вектора \mathbf{R} , но не \mathbf{n} . Формула (1. 9) приводит после трудоемких вычислений к тем же самым уравнениям.

Опорная траектория $R(\varphi)$ может быть выбрана различными способами в зависимости от характера поставленной задачи. В частности, можно составить $R(\varphi)$ из отрезков замкнутых равновесных орбит. Такая траектория определяется уравнениями

$$\begin{aligned} (\sin \Psi(\varphi))' - \cos \Psi(\varphi) + KR(\varphi) &= 0, \\ \operatorname{tg} \Psi_{j+} &= \operatorname{tg} \Psi_j, \quad \Delta R_j = \left(\frac{\Delta W}{2W}\right)_j R_j. \end{aligned} \quad (1. 10)$$

Величина ΔR_j описывает скачкообразный переход от замкнутой орбиты с энергией W к аналогичной орбите с энергией $W + \Delta W$.

В случае необходимости отличать траекторию (1. 10) от какой-либо другой опорной траектории мы будем обозначать ее как $R_e(\varphi)$.

Учитывая уравнения (1. 10) в (1. 8) и ограничиваясь членами порядка x, x' , получим

$$\frac{d}{d\vartheta} \begin{pmatrix} x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ G_{yx}(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_j = -\left(\frac{\Delta W}{2WK_0}\right)_j \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix}_j$$

или в векторных обозначениях

$$\frac{d}{d\vartheta} \mathbf{X}(\vartheta) = G(\vartheta) \mathbf{X}(\vartheta), \quad \Delta \mathbf{X}_j = -\left(\frac{\Delta W}{2WK_0}\right)_j \mathbf{Q}_j. \quad (1. 11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} y(\vartheta) &\equiv x'(\vartheta); \quad G_{yx}(\vartheta) \equiv G_{32}(\vartheta) = -u^2(\vartheta); \\ Q_x(\vartheta) &= K_0 R(\varphi) \cos \Psi(\varphi), \quad Q_y(\vartheta) = [1 + KR(\varphi) \cos \Psi(\varphi)] \operatorname{tg} \Psi(\varphi). \end{aligned} \quad (1. 12)$$

Решение однородной системы $d/d\vartheta \mathbf{X}(\vartheta) = G(\vartheta) \mathbf{X}(\vartheta)$ записывается в виде $\mathbf{X}(\vartheta) = M(\vartheta | \vartheta_0) \mathbf{X}(\vartheta_0)$, где $M(\vartheta | \vartheta_0)$ — матрица движения (поворота). Элементы этой матрицы могут быть выражены через два фундаментальных решения уравнения Хилла $x''(\vartheta) + u^2(\vartheta)x(\vartheta) = 0$, равных $x_{\pm}(\vartheta) = \rho(\vartheta)e^{\pm i\sigma(\vartheta, \vartheta_0)}$,

$\sigma(\vartheta, \vartheta_0) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \rho^{-2}(\vartheta) d\vartheta$, причем $\sigma(\vartheta_0, \vartheta_0) = 0$, $\sigma(2\pi(n+1), 2\pi n) = 2\pi\nu_x(n)$. Здесь

$\nu_x(n)$ — частота радиальных бетатронных колебаний на n -ом обороте; $\rho(\vartheta)$ — решение уравнения $\rho''(\vartheta) + u^2(\vartheta)\rho(\vartheta) = \rho^{-3}(\vartheta)$, модулированное в такт вариации $u^2(\vartheta)$. Если $u^2(\vartheta)$ — периодическая функция, то $\rho(\vartheta)$ периодична с тем же периодом.

Имеем (см. также раздел 3 настоящей работы)

$$\begin{aligned} M(\vartheta | \vartheta_0) &= M_f(\vartheta | \vartheta_0) M_f^{-1}(\vartheta_0 | \vartheta_0) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \rho' & \rho^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0^{-1} & 0 \\ -\rho_0' & \rho_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \rho \rho_0^{-1} \cos \sigma - \rho \rho_0' \sin \sigma & \rho \rho_0 \sin \sigma \\ -(\rho^{-1} \rho_0^{-1} + \rho' \rho_0') \sin \sigma + (\rho^{-1} \rho_0^{-1} - \rho^{-1} \rho_0') \cos \sigma & \rho^{-1} \rho_0 \cos \sigma + \rho' \rho_0 \sin \sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При периодических условиях движения матрица перемещения на элемент периодичности θ имеет вид

$$M(\vartheta + \theta | \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \nu_x - \rho \rho' \sin \theta \nu_x & \rho^2 \sin \theta \nu_x \\ -(\rho^{-2} + \rho'^2) \sin \theta \nu_x & \cos \theta \nu_x + \rho \rho' \sin \theta \nu_x \end{pmatrix}.$$

Зависимость X от числа оборотов n нас будет интересовать при фиксированном азимуте наблюдения $\vartheta_{\text{наб}}: \vartheta = 2\pi n + \vartheta_{\text{наб}}, 2\pi > \vartheta_{\text{наб}} > 0$. Не теряя общности, можно положить $\vartheta_{\text{наб}} = \varphi_{\text{наб}} = 0$. Тогда

$$X_n = M(2\pi n | 2\pi n_0) X_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \sum_{j=1}^{N_a} \left(\frac{\Delta W}{2WK_0} \right)_{kj} M(2\pi n | 2\pi k + \vartheta_j) Q(2\pi k + \vartheta_j), \quad (1.13)$$

где $X_n \equiv X(2\pi n)$; N_a — число щелей.

Существует комплексное представление

$$\hat{X} = \rho^{-1}x + i(\rho y - \rho'x), \quad \hat{Q} = \rho^{-1}Q_x + i(\rho Q_y - \rho'Q_x), \quad (1.14)$$

в котором свободное решение удовлетворяет уравнению

$$\hat{X}'(\vartheta) = -i\rho^{-2}(\vartheta) \hat{X}(\vartheta)$$

и, следовательно, распространяется по закону

$$\hat{X}(\vartheta) = \exp \left\{ -i \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \rho^{-2}(\vartheta) d\vartheta \right\} \hat{X}(\vartheta_0),$$

причем

$$\hat{X}_n = \exp \left\{ -i \int_{n_0}^n \mu_n dn \right\} \hat{X}_{n_0}, \quad \mu_n = 2\pi[\nu_x(n) - 1]. \quad (1.15)$$

(Вычитание единицы из ν_x не меняет величину экспоненты.)

Рассмотрим выражение (1.13) в случае постоянных условий ускорения, когда ΔW , μ и другие параметры циклотрона не зависят от числа оборотов. В этом случае (1.13) переходит в

$$\hat{X}_n = e^{-i\mu(n-n_0)} \hat{X}_{n_0} - \frac{D}{N_a} \sum_{k=n_0}^{n-1} \sum_{j=1}^{N_a} \frac{1}{\sqrt{k + \delta_j}} e^{-i\mu(n-k)} \hat{M}^{-1}(\vartheta_j | 0) \hat{Q}(\vartheta_j), \quad (1.16)$$

где n — абсолютное число оборотов, определяемое как ближайшее к $W_{nj}/N_a\Delta W$ целое число; δ_j — поправка, учитывающая нецелый характер величины $W_{nj}/N_a\Delta W$ и возможное уточнение формулы (1.3); D — характерная длина

$$D = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{N_a\Delta W}{2m_0}} \left(\frac{\Delta W}{2WK_0} = \frac{\Delta W}{\omega_0 v} = \frac{D}{N_a \sqrt{n + \delta}} \right), \quad (1.17)$$

Сумму по k можно вычислить с помощью формулы

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{i\mu k} = n_0 |n e^{i\mu k} F(k), \quad F(n) = F_1(n) + iF_2(n), \quad (1.18)$$

$$F_1(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \left[1 + \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{12} \right) \frac{1}{n} + \dots \right], \quad F_2(n) = \frac{1}{\mu\sqrt{n}} \left[1 - \frac{3}{4\mu^2 n^2} - \frac{\mu^2}{12} + \dots \right]. \quad (1.19)$$

(В [7] функция $F(n)$ обозначалась как $-F(n)^*$.)

Выражения (1.18), (1.19) получаются путем замены суммирования интегрированием по методу Эйлера:

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{i\mu k} = \int_{n_0}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{i\mu k} dk + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \left(i\mu - \frac{1}{2k} \right)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{i\mu k} + \int_{n_0}^n \frac{dk}{\sqrt{k}} e^{i\mu k}$$

и последующего асимптотического разложения неопределенного интеграла в области больших x :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{ix} = \left(-\frac{i}{x^{1/2}} - \frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{3i}{4x^{5/2}} + \dots \right) e^{ix}.$$

Подставляя

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+\delta}} e^{i\mu(k+\delta-n)} = F(n_0+\delta) e^{i\mu(n-n_0)} - F(n+\delta)$$

в (1.16), получим

$$\hat{X}_n = \hat{X}_{n_0} e^{-i\mu(n-n_0)} - \frac{D}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} [F(n_0+\delta_j) e^{-i\mu(n-n_0)} - F(n+\delta_j)] \hat{M}^{-1}(\vartheta_j | 0) \hat{Q}(\vartheta_j). \quad (1.20)$$

Существенно, что $F_{1,2}(n)$ — очень плавные, монотонно убывающие функции. Мы видим, что действие щелей сводится к возбуждению колебаний с частотой $\mu = 2\pi(\nu_x - 1)$ и созданию смещения, пропорционального функциям $F(n+\delta_j)$. При этом существует такое начальное значение $\hat{X}_s(2\pi n_0)$, равное

$$\hat{X}_s(2\pi n_0) = \frac{D}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} F(n+\delta_j) \hat{M}^{-1}(\vartheta_j | 0) \hat{Q}(\vartheta_j), \quad (1.21)$$

для которого суммарная амплитуда колеблющихся слагаемых обращается в нуль.

Заменяя в (1.21) $n_0 \rightarrow n$ и возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$X_s(2\pi n) = \frac{D}{N_a} \sum_{j=1}^{N_a} F(n+\delta_j | 0) M^{-1}(\vartheta_j | 0) Q(\vartheta_j), \quad (1.22)$$

где

$$\begin{aligned} F(n | 0) &= \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \rho' & \rho^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(n) & -F_2(n) \\ F_2(n) & F_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ -\rho' & \rho \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_1(n) + \rho\rho'F_2(n) & -\rho^2F_2(n) \\ (\rho^{-2} + \rho'^2)F_2(n) & F_1(n) - \rho\rho'F_2(n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

(Величины ρ, ρ' берутся на азимуте наблюдения.)

Существенно, что изменение X при переходе от одного азимута наблюдения к другому, в пределах одного оборота, описывается матрицей, не зависящей от n (или зависящей очень слабо). Поэтому, если колебания X_n отсутствуют на каком-либо одном азимуте, они отсутствуют и на всех.

Таким образом, траектория (1.22) представляет собой равномерно разворачивающуюся спираль, не имеющую обычных сгущений и разрежений. Эта траектория называется *идеальной* и обозначается как $X_s(\vartheta)$ или $R_s(\varphi)$.

Предположение о постоянстве условий ускорения сделано выше только для простоты. В действительности формула (1.22) тривиально обобщается на случай достаточно медленного (адиабатического) изменения условий ускорения [7]. Более того, идеальные траектории могут быть определены и в случае явной зависимости ΔW от времени. Действительно, представим себе следующую итерационную процедуру: приросты энергии фиксируются, находится соответствующая им идеальная траектория, вычисляются

фактические приросты энергии вдоль этой траектории, фиксируются, находится соответствующая им новая идеальная траектория и т. д. В пределе фиксированные приросты энергии уже не будут отличаться от фактических. Это означает, что вдоль идеальной траектории зависимость ΔW от времени эффективно сводится к адиабатической зависимости от числа оборотов [8].

Идеальная траектория (1. 21) была вычислена в аналитической форме по ступенчатой модели. Полученный результат сравнивался с точным численным расчетом этой же модели, выполненным в работе [3]. Согласие обоих результатов оказалось хорошим: при $\delta=0$ погрешность формулы (1. 21) в области $10 < n < 20$ не превосходит 6,5%. Если рассматривать δ как эмпирическую поправку, можно добиться практически полного совпадения формулы (1. 21) с действительностью.

2. Бетатронные колебания около идеальных траекторий $R_s(\varphi)$. Влияние параметра $\Delta W/W$ на частоту радиальных колебаний. Нефизические «ступеньки», имеющиеся у траектории $R_s(\varphi)$, приводят к тому, что члены типа x/R , x'/R , $\Delta W/W$ имеют одинаковый порядок величины (см. граничные условия в (1. 11)). Вследствие этого учет линейных членов типа $(\Delta W/W) \cdot (x/R)$, $(\Delta W/W) \cdot (x'/R)$ без одновременного учета нелинейных членов типа $(x/R)^2$ незаконен и приводит к неправильным результатам. Чтобы обойти эту трудность, необходимо выбрать другую опорную траекторию, не имеющую упомянутых «ступенек». Именно положим $R(\varphi) = R_s(\varphi)$, где $R_s(\varphi)$ — введенная в предыдущем разделе идеальная траектория. Эта траектория удовлетворяет тем же уравнениям (1. 6), что и другие реально осуществимые траектории:

$$\begin{aligned} (\sin \Psi(\varphi))' - \cos \Psi(\varphi) + KR(\varphi) &= 0, \\ \text{tg } \Psi_{j+} &= \left(1 - \frac{\Delta W}{2W \cos^2 \Psi}\right)_j \text{tg } \Psi_j, \quad \Delta R_j = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

(Специфика идеальной траектории определяется ее начальными условиями.) Учитывая (2. 1) в (1. 8) и удерживая члены типа x/R , x'/R , $\Delta W/W$, x/R , $\Delta W/W$, x'/R , получим

$$\frac{d}{d\vartheta} \begin{pmatrix} x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ G_{yx}(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx} & 0 \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_j$$

или в векторных обозначениях,

$$\frac{d}{d\vartheta} \mathbf{X}(\vartheta) = G(\vartheta) \mathbf{X}(\vartheta), \quad \Delta \mathbf{X}_j = \Gamma_j \mathbf{X}_j. \quad (2.2)$$

Здесь $G_{yx}(\vartheta)$ выражается через $R(\varphi)$ по прежним формулам;

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\vartheta) \equiv \Gamma_{22}(\vartheta) &= \frac{\Delta W}{2W} \text{tg}^2 \Psi(\varphi), \quad \Gamma_{yy}(\vartheta) \equiv \Gamma_{33}(\vartheta) = -\frac{\Delta W}{2W} \text{tg}^2 \Psi(\varphi), \\ \Gamma_{yx}(\vartheta) \equiv \Gamma_{32}(\vartheta) &= -\frac{\Delta W}{2W} \frac{K}{K_0} (1 - \text{tg}^2 \Psi(\varphi)) \text{tg } \Psi(\varphi). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Матрица $\Gamma(\vartheta)$ удовлетворяет условию $\text{Det}(I + \Gamma) = 1$ точно. Приближенные матричные элементы (2. 3) удовлетворяют этому условию в рамках принятого для них приближения.

Система (2. 2) однородна, поэтому ее решение может быть записано в виде

$$\mathbf{X}(\vartheta) = M(\vartheta | \vartheta_0) \mathbf{X}(\vartheta_0). \quad (2.4)$$

Коэффициенты уравнений (2. 2) приближенно периодичны с периодом $\theta \leq 2\pi$. Периодичность нарушается изменением формы магнитного поля (этот эффект малосуществен) и ростом энергии в $\Delta W/W$. Для определения

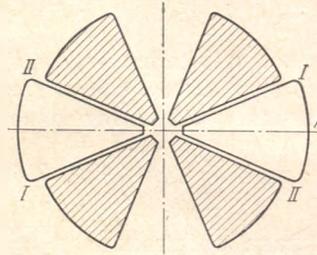
частоты ν_x необходимо отвлекаться от указанной аperiodичности, приняв величину $\Delta W/W$ в рассматриваемом интервале $\theta < \vartheta \leq 0$ одинаковой для всех щелей. После этого частота ν_x может быть определена из соотношения

$$2 \cos \theta \nu_x = \text{Sp } M(\theta | 0). \tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение малое внутреннее возмущение, такое, что $M \rightarrow M + \delta M$, $\nu_x \rightarrow \nu_x + \delta \nu_x$.

Рис. 1. Схема секторного циклотрона [2].

I, II — ускоряющие щели; A — прямая, на которой наблюдается прохождение частицы, служит одновременно началом отсчета углов φ и ϑ ; частица движется против часовой стрелки



Если ν_x близка к единице и $\theta = \pi$, то из (2.5) следует

$$\delta \nu_x = \sqrt{(\nu_x - 1)^2 + \frac{1}{\pi^2} \text{Sp } \delta M(\pi | 0)} - (\nu_x - 1). \tag{2.6}$$

В случае отрицательности подкоренного выражения поправка $\delta \nu_x$ комплексна, т. е. имеет место параметрический резонанс. При этом $\text{Re}(\nu_x + \delta \nu_x) = 1$.

Существенно, что если в интервале периодичности невозмущенные условия движения симметричны (четны), а возмущение антисимметрично (нечетно) относительно середины интервала, то линейная по возмущению поправка к $\text{Sp } M(\pi | 0)$ равна нулю.

Пусть невозмущенная задача характеризуется значением $\Delta W/W = 0$, тогда возмущением являются матрицы Γ_j (граничный эффект) и функция $\delta u^2(\vartheta) = u^2(\vartheta) - u^2(\vartheta)$ (орбитальный эффект). Последний эффект обусловлен различием между траекториями $R_\varphi(\varphi)$ и $R_\vartheta(\varphi)$. Оба названных возмущения можно взять в низшем (линейном) по $\Delta W/W$ приближении, т. е. положить

$$\Gamma_j = \Gamma_j^{(1)}, \quad \delta u^2(\vartheta) = u^{2(1)}(\vartheta). \tag{2.7}$$

Упомянутое выше свойство симметрии в сочетании с оценочными расчетами позволяет сделать некоторые выводы относительно поправки $\delta M(\pi | 0) = \delta^{(1)} M(\pi | 0) + \delta^{(2)} M(\pi | 0) + \dots$, вызванной возмущениями (2.7).

Рассмотрим для определенности изохронный циклотрон, типа, рассмотренного в [2], состоящий из четырех магнитных секторов и двух 45-градусных дуантов, расположенных в противоположных промежутках между магнитными секторами (рис. 1). Началом отсчета углов ϑ и φ пусть служит биссектриса одного из дуантов.

Замечая, что матрицы $\Gamma_j^{(1)}$ берутся, по определению, на замкнутых равновесных орбитах, для которых $\Psi_{j+1} = -\Psi_j$, получим

$$\Gamma_{j+1}^{(1)} = \Gamma_j^{(1)}, \tag{2.8}$$

где операция, обозначенная чертой, определена в (3.25). Нетрудно понять, что совокупность граничных матриц с симметрией (2.8) равносильна антисимметричному возмущению функции $u^2(\vartheta)$ ¹. Следовательно, на

¹ Полезно иметь в виду, что матрицы $\Gamma_j(\vartheta)$ эквивалентны возмущению $u^2(\vartheta) \rightarrow u^2(\vartheta) - \sum_j [(\Gamma_{yx} + \Gamma'_{yx})_j \delta(\vartheta - \vartheta_j) + \Gamma_{xx, j} \delta'(\vartheta - \vartheta_j)]$.

основании сказанного выше вклад граничного эффекта в $\text{Sp } \delta^{(1)} M (\pi | 0)$ равен нулю.

Свойства орбитального эффекта менее очевидны. Однако исследование, основанное на ступенчатой модели и естественных предположениях о характере идеальной траектории, позволяет утверждать, что возмущение $u^{(1)}(\vartheta)$ также антисимметрично.

Таким образом, при симметричной ориентации электрической системы радиально-секторного циклотрона относительно его магнитной системы

$$\text{Sp } \delta^{(1)} M (\pi | 0) = 0, \quad (2.9)$$

Обратимся к квадратичным поправкам. Вклад граничного эффекта может быть вычислен в рамках ступенчатой модели вполне точно. По порядку величины результат равен

$$\text{Sp } \delta^{(2)} M (\pi | 0) \sim -\left(\frac{\Delta W}{2W}\right)^2 \text{tg}^2 \Psi_j. \quad (2.10)$$

Оценка вклада орбитального эффекта дает

$$\text{Sp } \delta^{(2)} M (\pi | 0) \sim \left(\frac{\Delta W}{2W}\right)^2. \quad (2.11)$$

Заслуживает внимания наличие малого фактора $\text{tg}^2 \Psi_j$ в (2.10) и отсутствие его в (2.11). Не исключено, впрочем, что последняя оценка несколько завышена. Так или иначе, но оценки (2.10), (2.11) показывают, что дефокусирующий граничный эффект (2.10) компенсируется фокусирующим орбитальным эффектом (2.11). Следовательно, рассмотренное возмущение не создает опасности параметрического резонанса.

3. Совместное описание фазовых и бетатронных колебаний [9, 10].

В настоящем разделе вводится полная система уравнений, описывающих движение частицы в пространстве переменных r , φ , t . Совместное исследование траекторий $r(\varphi)$ и t позволяет учесть некоторые эффекты, связанные с переменным характером потенциала дуанта и конечной фазовой длиной сгустка. В случае, когда ускорение частицы происходит на наклонном участке потенциала $U(t)$, эти эффекты определяются главным образом величинами

$$\varepsilon_j = \frac{e}{\omega_0} \left(\frac{d}{dt} U(t) \right)_{t=T_j} \equiv \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{d}{dt} \Delta W(t) \right)_{t=T_j}, \quad (3.1)$$

где T_j — момент пересечения j -й щели опорной траекторией. Неравенство нулю величин (3.1) характерно для циклотронов с 60-, 45-градусными и другими «косоугольными» дуантами.

Итак, дополним систему (1.5) уравнением

$$t' = \frac{r}{v} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \equiv \frac{r}{v \cos \psi}, \quad (3.2)$$

где $t(\varphi)$ — время движения по траектории $r(\varphi)$.

Пусть $R(\varphi)$ — опорная траектория, составленная из отрезков идеальных траекторий; $T(\varphi)$ — время движения по $R(\varphi)$, определяемое уравнениями

$$T'(\varphi) = \frac{R(\varphi)}{v \cos \Psi(\varphi)}, \quad \Delta T_j = 0. \quad (3.3)$$

Положим

$$t(\varphi) = T(\varphi) + \tau(\vartheta). \quad (3.4)$$

Разлагая прирост энергии $\Delta W(t)$ по степеням τ и ограничиваясь линейным по τ приближением, получим

$$\Delta W(t_j) = \Delta W + \varepsilon_j \omega_0 \tau_j; \quad (3.5)$$

$\Delta W \equiv \Delta W(T_j)$ — номинальный прирост энергии. В этом же приближении $R(\varphi)$ подчиняется уравнениям

$$(\sin \Psi(\varphi))' - \cos \Psi(\varphi) + KR(\varphi) = 0, \quad (3.6)$$

$$\operatorname{tg} \Psi_{j+} = \left(1 - \frac{\Delta W}{2W \cos^2 \Psi}\right)_j \operatorname{tg} \Psi_j, \quad \Delta R_j = \left(\frac{\varepsilon}{2W}\right)_j R_j \omega_0 \tau_j.$$

Здесь ΔW и ε_j постоянны или являются очень плавными известными функциями числа оборотов; величина ΔR_j описывает скачкообразный переход от идеальной траектории с энергией W к аналогичной траектории с энергией $W + \varepsilon \omega_0 \tau$. Этот переход не сопровождается изменением времени ($\Delta T_j = 0!$), поскольку близкие идеальные траектории взаимно синхронны. Соответственно номинальная энергия W в знаменателях считается известной (заданной) ступенчатой функцией φ , общей для близких идеальных траекторий.

Учитывая (3.3), (3.6) при подстановке разбиений (3.4), (3.5) в (1.8), (3.2) и удерживая члены типа x/R , x'/R , $\varepsilon x/WR$, $\varepsilon x'/WR$, получим

$$\frac{d}{d\vartheta} \begin{pmatrix} \tau(\vartheta) \\ x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G_{12}(\vartheta) & G_{13}(\vartheta) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & G_{32}(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(\vartheta) \\ x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \tau \\ \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & 0 & 0 \\ \Gamma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \tau \\ x \\ y \end{pmatrix}_j$$

или, короче:

$$\frac{d}{d\vartheta} X(\vartheta) = G(\vartheta) X(\vartheta), \quad \Delta X_j = \Gamma_j X_j.$$

Здесь $G_{32}(\vartheta) = -u^2(\vartheta)$;

$$G_{12}(\vartheta) = \frac{1}{v} \left[1 + \left(1 - \frac{KR(\varphi)}{\cos \Psi(\varphi)}\right) \operatorname{tg}^2 \Psi(\varphi) \right] \frac{\cos \Psi(\varphi)}{K_0 R(\varphi)},$$

$$G_{13}(\vartheta) = \frac{1}{v} \operatorname{tg} \Psi(\varphi);$$

$$\Gamma_{21}(\vartheta) = -\frac{\varepsilon}{2W} K_0 R \cos \Psi(\varphi), \quad \Gamma_{31}(\vartheta) = -\frac{\varepsilon}{2W} [1 + KR(\varphi)] \operatorname{tg} \Psi(\varphi). \quad (3.8)$$

В случае необходимости можно включить в Γ элементы Γ_{22} , Γ_{32} , Γ_{33} , полученные в предыдущем разделе в результате учета членов типа $\Delta W x/WR$, $\Delta W x'/WR$ (см. формулы (2.3)).

Решение системы (3.7) записывается в виде, аналогичном (2.4), с той разницей, что теперь $M(\vartheta|\vartheta_0)$ — трехмерная матрица. Как уже отмечалось, для определения частоты ν_x необходимо пренебречь аperiodичностью матриц $G(\vartheta)$ и $\Gamma(\vartheta)$. Пусть период равен π . Соответствующее матрице $M(\pi|0)$ характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{Sp} M(\pi|0) + \lambda \operatorname{Sp} M^{-1}(\pi|0) - 1 = 0. \quad (3.9)$$

На основании [11] (см. гл. IV, § 5) следует ожидать, что один из корней уравнения (3.9), λ_1 , равен единице независимо от конкретных свойств циклотрона. Следствием этого является равенство

$$\operatorname{Sp} M(\pi|0) = \operatorname{Sp} M^{-1}(\pi|0). \quad (3.10)$$

При выполнении равенства (3. 10) уравнение (3. 9) переходит в уравнение

$$(\lambda - 1) \{ \lambda^2 - [\text{Sp } M(\pi | 0) - 1] \lambda + 1 \} = 0,$$

имеющее кроме $\lambda_1 = 1$ корни

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} [\text{Sp } M(\pi | 0) - 1] \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{4} [\text{Sp } M(\pi | 0) - 1]^2}.$$

Частота бетатронных колебаний ν_x удовлетворяет формуле

$$2 \cos \pi \nu_x = \text{Sp } M(\pi | 0) - 1. \quad (3. 11)$$

Продолжая пренебрегать аperiodичностью коэффициентов, введем матрицу $M_f(\vartheta | \vartheta_0)$, составленную из трех независимых решений системы (3. 7), в представлении Флоке. При $\lambda_1 = 1$ эта матрица имеет вид

$$M_f(\vartheta | \vartheta_0) = \begin{pmatrix} a_1(\vartheta) & \rho_1(\vartheta) \sin \sigma_1(\vartheta, \vartheta_0) & -\rho_1(\vartheta) \cos \sigma_1(\vartheta, \vartheta_0) \\ a_2(\vartheta) & \rho_2(\vartheta) \cos \sigma_2(\vartheta, \vartheta_0) & \rho_2(\vartheta) \sin \sigma_2(\vartheta, \vartheta_0) \\ a_3(\vartheta) & -\rho_3(\vartheta) \sin \sigma_3(\vartheta, \vartheta_0) & \rho_3(\vartheta) \cos \sigma_3(\vartheta, \vartheta_0) \end{pmatrix}. \quad (3. 12)$$

Каждый столбец матрицы (3. 12) представляет собой одно из решений; $a_i(\vartheta)$, $\rho_i(\vartheta)$, $\chi_i(\vartheta)$ — действительные функции, модулированные в такт азимутальной вариации условий движения;

$$\sigma_i(\vartheta, \vartheta_0) = \nu_x(\vartheta - \vartheta_0) + \chi_i(\vartheta); \quad (3. 13)$$

из уравнений движения следует, что вне щелей последняя строка матрицы (3. 12) является производной предыдущей.

Из-за неопределенности в выборе действительных постоянных множителей перед каждым из трех решений, можно наложить на матрицу (3. 12) три дополнительных условия. Оставляя одно условие свободным, наложим два:

$$\sigma_2(\vartheta_0, \vartheta_0) = 0, \quad \text{Det } M_f(\vartheta | \vartheta_0) \equiv a_1 \rho_2 \rho_3 \cos(\sigma_2 - \sigma_3) + \\ + a_2 \rho_3 \rho_1 \sin(\sigma_3 - \sigma_1) + a_3 \rho_1 \rho_2 \cos(\sigma_1 - \sigma_2) = 1. \quad (3. 14)$$

При $\vartheta = \vartheta_0$ будем иметь

$$\text{Det } M_f(\vartheta_0 | \vartheta_0) = [a_1 \rho_2 \rho_3 \cos \sigma_3 + a_2 \rho_3 \rho_1 \sin(\sigma_3 - \sigma_1) + a_3 \rho_2 \rho_1 \cos \sigma_1]_{\vartheta = \vartheta_0}, \\ M_f^{-1}(\vartheta_0 | \vartheta_0) = \begin{pmatrix} \rho_2 \rho_3 \cos \sigma_3 & \rho_3 \rho_1 \sin(\sigma_3 - \sigma_1) & \rho_1 \rho_2 \cos \sigma_1 \\ -a_2 \rho_3 \cos \sigma_3 & a_1 \rho_3 \cos \sigma_3 + a_3 \rho_1 \cos \sigma_1 & -a_2 \rho_1 \cos \sigma_1 \\ -a_3 \rho_2 - a_2 \rho_3 \sin \sigma_3 & a_1 \rho_3 \sin \sigma_3 + a_3 \rho_1 \sin \sigma_1 & a_1 \rho_2 - a_2 \rho_1 \sin \sigma_1 \end{pmatrix}_{\vartheta = \vartheta_0}. \quad (3. 15)$$

Очевидно, что

$$M(\vartheta | \vartheta_0) = M_f(\vartheta | \vartheta_0) M_f^{-1}(\vartheta_0 | \vartheta_0). \quad (3. 16)$$

Формулы (3. 12), (3. 15), (3. 16) решают задачу получения $M(\vartheta | \vartheta_0)$ в случае периодических условий движения. В действительности условия движения не вполне периодичны главным образом за счет множителей v^{-1} , W^{-1} . Чтобы обобщить полученный результат на случай такого рода адиабатических отклонений от периодичности, достаточно интерпретировать функции $a_j(\vartheta)$, $\rho_j(\vartheta)$, $\chi_j(\vartheta)$ и частоту ν_x как *сопутствующие* величины, определенные на каждом обороте для периодически продолженных условий движения. После этого выражение (3. 13) для фаз $\sigma_j(\vartheta, \vartheta_0)$ останется правильным только в пределах одного оборота. Фазы, приобретенные за несколько оборотов, должны вычисляться путем суммирования вкладов отдельных оборотов. В частности, прирост фазы за

целое число оборотов равен

$$\sigma_{i,nn_0} \equiv \sigma_i(2\pi n, 2\pi n_0) = \int_{n_0}^n 2\pi \nu_x(n) dn + \eta_i(n), \quad \eta_2(n) = 0.$$

Здесь $\eta_i(n)$ — некоторая ненакапливающаяся фаза. Не совершая ошибки, можно заменить это выражение на

$$\sigma_{i,nn_0} = \int_{n_0}^n \mu_n dn + \eta_i(n), \quad \eta_2(n) = 0. \quad (3.17)$$

Как и в предыдущем разделе, нас будет интересовать зависимость решения $X_n \equiv X(2\pi n)$ от числа оборотов n при фиксированном азимуте наблюдения $\vartheta_{\text{наб}} = \varphi_{\text{наб}} = 0$:

$$X_n = M(2\pi n | 2\pi n_0) X_{n_0} = M_f(2\pi n | 2\pi n_0) M_f^{-1}(2\pi n_0 | 2\pi n_0) X_{n_0}.$$

Полезно иметь в виду, что после перехода от X_n к новому неизвестному \bar{X}_n по формуле

$$\bar{X}_n = M_f^{-1}(2\pi n | 2\pi n) X_n \quad (3.18)$$

матрица движения

$$\bar{M}(2\pi n | 2\pi n_0) = M_f^{-1}(2\pi n | 2\pi n) M_f(2\pi n | 2\pi n_0)$$

оказывается особенно простой:

$$\bar{M}(2\pi n | 2\pi n_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma_{2,nn_0} & \sin \sigma_{2,nn_0} \\ 0 & -\sin \sigma_{2,nn_0} & \cos \sigma_{2,nn_0} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Рассмотрим невозмущенные решения, определяемые уравнениями (3.7) при $\Gamma=0$. Для этих решений удобно ввести специальные обозначения, а именно

$$\beta \equiv \rho_1, \quad \rho \equiv \rho_2, \quad \sigma \equiv \sigma_2. \quad (3.20)$$

На биссектрисах промежуточных и магнитных секторов невозмущенные решения удовлетворяют вытекающим из симметрии и уравнений движения условиям

$$\rho' = 0, \quad \rho_3 = \rho \sigma', \quad \sigma_1 = \sigma_3 = \sigma.$$

При этом дополнительное условие имеет вид

$$\rho^2 \sigma' = 1.$$

Предполагая, что азимут наблюдения $\vartheta_{\text{наб}} = \varphi_{\text{наб}} = 0$ является одновременно азимутом биссектрисы (целесообразно выбрать азимут наблюдения в середине промежуточного сектора), будем иметь

$$\begin{aligned} M(2\pi n | 0) &= M_f(2\pi n | 0) M_f^{-1}(0 | 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \beta_n \sin \sigma_{n0} & -\beta_n \cos \sigma_{n0} \\ 0 & \rho_n \cos \sigma_{n0} & \rho_n \sin \sigma_{n0} \\ 0 & -\rho_n^{-1} \sin \sigma_{n0} & \rho_n^{-1} \cos \sigma_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_0 \rho_0 \\ 0 & \rho_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \rho_0^{-1} \beta_n \sin \sigma_{n0} & \rho_0 \beta_0 - \rho_0 \beta_n \cos \sigma_{n0} \\ 0 & \rho_0^{-1} \rho_n \cos \sigma_{n0} & \rho_0 \rho_n \sin \sigma_{n0} \\ 0 & -\rho_0^{-1} \rho_n^{-1} \sin \sigma_{n0} & \rho_0 \rho_n^{-1} \cos \sigma_{n0} \end{pmatrix}; \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$M(\pi | 0) = \begin{pmatrix} 1 & \rho^{-1} \beta \sin \pi \nu_x & \rho \beta (1 - \cos \pi \nu_x) \\ 0 & \cos \pi \nu_x & \rho^2 \sin \pi \nu_x \\ 0 & -\rho^{-2} \sin \pi \nu_x & \cos \pi \nu_x \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Возмущением являются матрицы Γ_j , определенные, строго говоря, на идеальных траекториях. Учитывая, однако, что разница между идеальной траекторией и соответствующей равновесной орбитой мала как $\Delta W/W$, мы можем отнести Γ_j и к равновесным орбитам. На этих орбитах Γ_j имеют определенную симметрию, играющую важную роль в дальнейших рассуждениях.

Циклотрон типа [2], изображенный на рис. 1, характеризуется двумя значениями ε : $\varepsilon_I = |\varepsilon_I|$ и $\varepsilon_{II} = -|\varepsilon_{II}|$. Все поправки, пропорциональные $\varepsilon_{I, II}$, естественно распадаются на две группы, пропорциональные

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{1}{2} (|\varepsilon_I| \pm |\varepsilon_{II}|). \quad (3.23)$$

Для изохронного циклотрона поправки $\sim \varepsilon_+$ являются нормой, а поправки $\sim \varepsilon_-$ — нежелательным исключением. Учитывая это, ограничимся поправками $\sim \varepsilon_+$. Тогда, в силу $\Psi_I = |\Psi_I|$, $\Psi_{II} = -|\Psi_I|$

$$\Gamma_{II} = \Gamma_I. \quad (3.24)$$

Операция, обозначаемая чертой, имеет следующие определение и свойства:

$$M_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}, \quad \overline{M^{-1}} = \overline{M}^{-1}, \quad \text{Sp } M = \text{Sp } M. \quad (3.25)$$

Возмущенная матрица полуоборота равна

$$\begin{aligned} M(\pi|0) + \delta M(\pi|0) &= \overline{M}_{2/2} (I + \overline{\Gamma}) M_1 M_2 M_1 (I + \Gamma) M_{2/2} = \\ &= (I + L) M(\pi|0) (I + L), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\Gamma \equiv \Gamma_I$; $\varepsilon_{I, II} \equiv \varepsilon_+$; M_1, M_2 — матрицы магнитного и промежуточного секторов (краевой эффект включен в M_1); $\overline{M}_{2/2}, M_{2/2}$ — матрицы первой и второй половин промежуточного сектора; $\overline{M}_{2/2} \overline{M}_{2/2}^{-1} = M_2$; $L = M_{2/2}^{-1} \Gamma M_{2/2}$ — эффективная щелевая матрица. В разделе 5 показано, что L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & L_{13} \\ 0 & L_{22} & 0 \\ L_{31} & 0 & L_{33} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\text{Sp } L = 0, \quad L_{13} + \beta \rho L_{33} = 0, \quad L_{11} + \beta \rho L_{31} = 0. \quad (3.28)$$

(Эти свойства обнаруживаются после применения ступенчатой модели. Однако нет сомнения в том, что, по крайней мере, часть из них имеет вполне общий характер.)

После учета вытекающего из (3.27) равенства $\overline{L} = L$ результат (3.26) принимает следующий окончательный вид:

$$\delta^{(1)} M(\pi|0) = LM(\pi|0) + M(\pi|0)L, \quad \delta^{(2)} M(\pi|0) = LM(\pi|0)L. \quad (3.29)$$

Рассмотрим сначала поправки первого порядка. Выполняя умножение матриц (3.22), (3.27) и учитывая (3.28), получим

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} M(\pi|0) &= \\ &= \begin{pmatrix} L_{11}(1 + \cos \pi \nu_x) & 0 & \beta \rho [L_{11}(1 + \cos \pi \nu_x) + 2L_{22} \cos \pi \nu_x] \\ L_{31} \rho^2 \sin \pi \nu_x & 2L_{22} \cos \pi \nu_x & -L_{11} \rho^2 \sin \pi \nu_x \\ L_{31}(1 + \cos \pi \nu_x) & 0 & -L_{11}(1 + \cos \pi \nu_x) - 2L_{22} \cos \pi \nu_x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Равенство нулю шпура этой матрицы является следствием антисимметрии возмущения.

Записывая возмущенную матрицу Флоке в виде

$$\begin{aligned}
 & M_f(\pi|0) + \delta M_f(\pi|0) = \\
 & = \begin{pmatrix} (\cos \eta)^{-1} & \beta \sin(\pi\nu_x + \eta) & -\beta \cos(\pi\nu_x + \eta) \\ a & \rho \cos \pi\nu_x & \rho \sin \pi\nu_x \\ 0 & -\rho^{-1} \sin(\pi\nu_x + \eta) & \rho^{-1} \cos(\pi\nu_x + \eta) \end{pmatrix}, \quad (3.31) \\
 & M_f(0|0) + \delta M_f(0|0) \approx \begin{pmatrix} 1 & \beta \sin \eta & -\beta \\ a & \rho & 0 \\ 0 & -\rho^{-1} \sin \eta & \rho^{-1} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где a , η — линейные по ε_+ поправки, найдем далее

$$|M_f(0|0) + \delta M_f(0|0)|^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta\rho \\ -a\rho^{-1} & \rho^{-1} & -a\beta \\ -a\rho^{-1} & \rho^{-1} \sin \eta & \rho \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$M(\pi|0) + \delta M(\pi|0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - a\beta\rho^{-1} \sin \pi\nu_x & \beta\rho^{-1} \sin \pi\nu_x & \beta\rho[1 - \cos(\pi\nu_x + \eta)] - a\beta^2 \sin \pi\nu_x \\ a(1 - \cos \pi\nu_x) & \cos(\pi\nu_x - \eta) & a\beta\rho(1 - \cos \pi\nu_x) + \rho^2 \sin \pi\nu_x \\ a\rho^{-2} \sin \pi\nu_x & -\rho^{-2} \sin \pi\nu_x & a\beta\rho^{-1} \sin \pi\nu_x + \cos(\pi\nu_x + \eta) \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Сравнение (3.22), (3.30) с (3.33) дает

$$a\rho = \rho L_{31} \rho^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi\nu_x}{2} = -\varepsilon_+ \frac{\sin \pi/8}{\cos \alpha} \rho^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi\nu_x}{2}, \quad (3.34)$$

$$\eta = 2L_{22} \operatorname{ctg} \pi\nu_x = -\frac{\varepsilon_+}{2W} \cdot \frac{K_0(\sin \pi/4 - \sin 2\alpha)}{K_2 \cos^2 \alpha} \operatorname{ctg} \pi\nu_x.$$

Последние выражения в (3.34) относятся к ступенчатой модели при 45-градусных секторах и дуантах; α — абсолютное значение угла падения равновесной орбиты на границу сектора; $K_2 = \kappa K_1$ — кривизна траектории в промежуточном секторе.

Выбранный в (3.26) азимут наблюдения соответствует середине дуанта. Для другого азимута наблюдения, соответствующего середине свободного от дуанта промежуточного сектора, возмущенная матрица полуоборота имеет тот же вид (3.33), но с другими значениями a и η :

$$a_{\text{своб}} = L_{31} \rho^2 \operatorname{csc} \frac{\pi\nu_x}{2}, \quad \eta_{\text{своб}} = 2L_{22} \operatorname{csc} \pi\nu_x. \quad (3.35)$$

Сравнение (3.35) с (3.34) дает

$$a = a_{\text{своб}} \cos \frac{\pi\nu_x}{2} \ll a_{\text{своб}}, \quad \eta = \eta_{\text{своб}} \cos \pi\nu_x \approx -\eta_{\text{своб}}.$$

(Учтено $\nu_x \approx 1$; $|\cos \pi\nu_x/2| \approx \pi(\nu_x - 1)/2 \ll 1$.) Первое из написанных соотношений указывает на сильную зависимость величины a от ее азимута относительно дуантной системы. Представляется весьма вероятным, что именно эта зависимость приводит к обнаруженному в [4] значительному увеличению энергетического разброса пучка при пространственном разделении основного и дополнительного дуантов.

Итак,

$$X_n = M_f(2\pi n|0) \bar{X}_0, \quad \bar{X}_n = M^{-1}(2\pi n|2\pi n) X_n$$

или

$$\begin{aligned} \tau_n &= \bar{\tau}_0 - \beta_n \rho_n y_n, & x_n &= \bar{\tau}_0 a_n + \bar{x}_0 \rho_n \cos \sigma_{n0} + \bar{y}_0 \rho_n \sin \sigma_{n0}, \\ y_n &\equiv x'(2\pi n) = -\bar{x}_0 \rho_n^{-1} \sin(\sigma_{n0} + \eta_n) + \bar{y}_0 \rho_n^{-1} \cos(\sigma_{n0} + \eta_n); & \sigma_{n0} &= \int_0^n dn \mu_n; \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_n &= \tau_n + \beta_n \rho_n y_n = \bar{\tau}_0, \\ \bar{x}_n &= -a_n \rho_n^{-1} \tau_n + \rho_n^{-1} x_n - a_n \beta_n y_n = \bar{x}_0 \cos \int dn \mu_n + \bar{y}_0 \sin \int dn \mu_n, \\ \bar{y}_n &= -a_n \rho_n^{-1} \tau_n + \rho_n^{-1} x_n \sin \eta + \rho_n y_n = -\bar{x}_0 \sin \int dn \mu_n + \bar{y}_0 \cos \int dn \mu_n. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Из (3.36), (3.37) видно, что вектор X_n движется с частотой $\mu = 2\pi(\nu_x - 1)$ по некоторому эллипсу, параметры которого в свою очередь с убывающей скоростью плавно изменяются в зависимости от n . Уравнение эллипса имеет вид

$$\rho^{-2}(x - a\bar{\tau}_0)^2 + 2\eta xy + \rho^2 y^2 = C, \quad (3.38)$$

где C — постоянная. Площадь эллипса не зависит от n и равна πC , центр смещен вдоль оси x на $a\bar{\tau}_0$, оси повернуты на угол φ , определяемый из $\operatorname{tg} \varphi = 2\eta(\rho_0^{-2} - \rho_n^{-2})$. Оба отмеченных эффекта (смещение и поворот) отчетливо проявляются в численных расчетах [4].

4. Влияние параметра $(\Delta W) / \omega_0 W$ на энергетический разброс пучка и частоту радиальных колебаний. Основываясь на (3.36), рассмотрим кратко вопрос о влиянии фазовых колебаний на энергию произвольной частицы сгустка.

Пусть центральная частица сгустка движется вдоль идеальной траектории, получая на каждой щели номинальный прирост энергии ΔW . Энергия этой частицы на азимуте наблюдения имеет соответственно номинальное значение W_n . Произвольная частица получает на каждой щели энергию (3.5), отличающуюся от ΔW на величину $\delta\Delta W = \varepsilon \omega_0 \tau$. За один оборот поправка к номинальному приросту составляет в рассматриваемом циклотроне

$$\sum_j (\delta\Delta W)_j = 2(\varepsilon_1 \omega_0 \tau_I + \varepsilon_{II} \omega_0 \tau_{II}) \approx 2\varepsilon_+ \omega_0 (\tau_I - \tau_{II}), \quad (4.1)$$

Исходя из

$$\begin{aligned} X_I &= M_{1/2} X_{\text{бвс}}, & X_{\text{бвс}} &= M_{1/2}^{-1} X_{II}, & X_{II} &= M_{1/2} X_{\text{бвс}}, \\ X_I - X_{II} &= (M_{1/2} - M_{1/2}^{-1}) X_{\text{бвс}}, & \tau_I - \tau_{II} &= 2(M_{1/2})_{12} x_{\text{бвс}}, \end{aligned}$$

где $X_{\text{бвс}} = X_n$ — значение на биссектрисе дуанта, получим

$$\delta(4\Delta W) = 4\varepsilon_+ \omega_0 (M_{1/2})_{12} x_n = 4\varepsilon_+ \omega_0 \frac{\sin \pi/8}{v_n \cos \alpha} (\bar{\tau}_0 a_n + \bar{x}_0 \rho_n \cos \sigma_{nn_0} + \bar{y}_0 \rho_n \sin \sigma_{nn_0}). \quad (4.2)$$

Ограничиваясь для простоты приближением постоянных условий ускорения, т. е. принимая, что ρ и μ не зависят от n ($\sigma_{nn_0} = \mu(n - n_0)$), выполним суммирование выражения (4.2) по n .

Вспомогательные формулы:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{a_k}{v_k} &= ap \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{v_k p k} = \frac{ap}{8\Delta W} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{ap}{8\Delta W} \ln \frac{W_n}{W_{n_0}}; \\ \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{v_k} e^{i\mu(k-n_0)} &= \frac{1}{2\omega_0 D} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{i\mu(k-n_0)} = \frac{1}{2\omega_0 D} n_0 |n e^{i\mu(k-n_0)} F(k); \end{aligned}$$

n — абсолютное число оборотов; $F(k) = F_1(k) + iF_2(k)$ — см. в (1.19); D — характеристная длина (1.17).

Собирая формулы, получим

$$\delta W_n = 2\varepsilon_+ \frac{\sin \pi/8}{\cos \alpha} \left\{ \frac{ap}{4\Delta W} \cdot \frac{\sin \pi/8}{\cos \alpha} \rho^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi \nu_x}{2} \omega_0 \tau_{n_0} \ln \frac{W_n}{W_{n_0}} + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{D} [F_1(n_0) \tilde{x}_{n_0} + F_2(n_0) \tilde{y}_{n_0}] - \frac{\rho}{D} [F_1(n) \tilde{x}_n + F_2(n) \tilde{y}_n] \right\}. \quad (4.3)$$

В (4.3) содержатся следующие слагаемые: 1) растущее по абсолютной величине как $\ln(n/n_0)$, 2) постоянное и 3) осциллирующее с частотой $\mu = 2\pi(\nu_x - 1)$. Амплитуда последнего слагаемого убывает как $n^{-1/2}$ за счет $F_{1,2}(n)$. Логарифмически растущее слагаемое связано со смещением центра эллипса (3.38); прочие слагаемые отражают влияние перемещения частицы по эллипсу.

Прирост энергии, как функция потенциала дуанта, записывается в виде

$$\Delta W(t_j) = e |U_0 \sin q_0 \omega_0 t_j - U_1 \sin q_1 \omega_0 t_j|, \quad (4.4)$$

где q_0, q_1 — кратности основной и дополнительной гармоник; U_0, U_1 — амплитуды; $q_0 \omega_0 t = \Phi$ — фаза. Предполагается, что идеальная траектория, по которой движется центральная частица, абсолютно изохронна как «в большом», так и «в малом». В этом случае имеются две симметричные рабочие фазы: $\pm \Phi_0, \Phi_0 > 0$, отвечающие моментам прохождения центральной частицы через щели I, II; $2\Phi_0$ — фазовый угол дуанта. Если отношение амплитуд выбирается из условия отсутствия квадратичных членов разложения величины (4.4) по τ , то

$$\frac{U_1}{U_2} = - \left(\frac{q_0}{q_1} \right)^2 \frac{\sin \Phi_0}{\sin \frac{q_1}{q_0} \Phi_0} \quad (4.5)$$

и

$$\Delta W(t_{I, II}) = \Delta W + \varepsilon_{I, II} \omega_0 \tau_{I, II}, \quad \Delta W = eU_0 \left(1 - \left(\frac{q_0}{q_1} \right)^2 \right) \sin \Phi_0, \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{I, II} = \pm \varepsilon_+, \quad \varepsilon_+ = \lambda q_0 \Delta W, \quad \lambda = \left(1 - \frac{q_0^2}{q_1^2} \right)^2 \left(\operatorname{ctg} \Phi_0 - \frac{q_0}{q_1} \operatorname{ctg} \frac{q_1}{q_0} \Phi_0 \right).$$

Для 45-градусного дуанта $\Phi_0 = q_0 \pi/8$.

Выпишем из (4.3) логарифмически растущее слагаемое.

$$\delta W_n^{(\log)} = - \frac{4\Delta W}{8} q_0 \lambda^2 \left(\frac{\rho \sin \pi/8}{\cos \alpha} \right)^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi \nu_x}{2} q_0 \omega_0 (\tau_{n_0} + \beta \rho y_{n_0}) \ln \frac{W_n}{W_{n_0}}. \quad (4.7)$$

В ступенчатой модели при

$$\alpha = 0,25, \quad W_n = 80 \text{ Мэв}, \quad W_{n_0} = 1 \text{ Мэв}, \quad 4\Delta W = 305 \text{ кэв}; \quad (4.8) \\ y_{n_0} = 0, \quad q_0 \omega_0 \tau_{n_0} = \pm 5^\circ$$

будем иметь в двух основных вариантах:

$$(A) \quad q_0 = 2, \quad q_1 = 6; \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad \delta W^{(\log)} = \mp 0,486 \text{ кэв}, \\ (B) \quad q_0 = 3, \quad q_1 = 6; \quad \lambda = \frac{4}{3} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right), \quad \delta W^{(\log)} = \mp 0,482 \text{ кэв}. \quad (4.9)$$

Расчет на ЭВМ, проделанный для варианта (B) в работе [4], дает $\delta W = \mp 3,5 \text{ кэв}$, в то время как допустимый разброс, соответствующий $\delta W/W = \mp 0,5 \cdot 10^{-4}$, составляет $\delta W = \mp 4 \text{ кэв}$.

Отмеченный эффект (назовем его логарифмическим) ограничивает теоретически достижимую степень монохроматичности пучка. Вклад других эффектов, также связанных с начальными размерами сгустка, в обычных условиях меньше или того же порядка. То обстоятельство, что при расчетах на ЭВМ теоретический предел (4.9) не был достигнут, может объяс-

няться как неточностью оценок (4. 9.) внесенной ступенчатой моделью, так и некоторыми факторами, отличающими расчет [4] (неабсолютный изохронизм, пространственное разделение основного и дополнительного дуантов и др.).

Располагая выражением для полной энергии частицы, мы можем найти величину $x_n^{(abc)}$, определяемую как расстояние по нормали до траектории центральной частицы сгустка $R^{(c)}$. Поскольку на выбранном азимуте наблюдения $\Psi=0$, мы имеем

$$r_n = R_n + x_n = R_n^{(c)} + x_n^{(abc)}. \quad (4. 10)$$

Расстояние R_n соответствует энергии рассматриваемой частицы $W_n + \delta W_n$; расстояние $R_n^{(c)}$ — энергии центральной частицы W_n . Следовательно,

$$R_n = R_n^{(c)} + R_n^{(c)} \frac{\delta W_n}{2W_n} = R_n^{(c)} + \frac{K_0 R}{\omega_0 \rho} \delta W_n,$$

откуда

$$\begin{aligned} x_n^{(abc)} = x_n + \frac{K_0 R}{\omega_0 \rho} \delta W_n = \rho \bar{x}_n + a_n \left[1 + \frac{\varepsilon_+ K_0 R \sin \pi/8}{2\Delta W \cos \alpha} \ln \frac{n}{n_0} \right] \bar{z}_0 + \\ + \frac{\varepsilon_+ K_0 R \sin \pi/8}{2\Delta W \cos \alpha} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{n}} [F_1(n_0) \bar{x}_{n_0} + F_2(n_0) \bar{y}_{n_0}] + \dots \end{aligned} \quad (4. 11)$$

(Опущены члены, малые, как n^{-1} .)

Результат (4. 11) становится более наглядным, если ограничиться чисто синхротронными колебаниями, т. е. положить $x_{n_0} = y_{n_0} = 0$. При этом

$$\begin{aligned} \bar{z}_0 \rightarrow \tau_{n_0}, \quad \bar{x}_{n_0} \rightarrow -a_{n_0} \rho^{-1} \tau_{n_0}, \quad \bar{y}_{n_0} \rightarrow -a_{n_0} \rho^{-1} \tau_{n_0}, \\ x_n^{(abc)} \rightarrow \rho \bar{x}_n + \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_+ K_0 R \sin \pi/8}{2\Delta W \cos \alpha} \left[\ln \frac{n}{n_0} - \frac{1}{\sqrt{n_0}} [F_1(n_0) + F_2(n_0)] \right] \right\} a_n \tau_{n_0}. \end{aligned} \quad (4. 12)$$

Угол между средним направлением оси сгустка и средним направлением его скорости определяется из

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta\varphi = \langle x^{(abc)} \rangle / R \omega_0 \tau_{n_0} = \\ = \frac{ap}{2WK_0R} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_+ K_0 R \sin \pi/8}{2\Delta W \cos \alpha} \left[\ln \frac{n}{n_0} - \frac{1}{\sqrt{n_0}} [F_1(n_0) + F_2(n_0)] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4. 13)$$

По порядку величины угол $\delta\varphi$ равен

$$\delta\varphi \sim -\frac{\varepsilon_+}{2W} \cos \frac{\pi y_x}{2}.$$

Ввиду отмечавшейся выше азимутальной зависимости величины, a в середине свободного от дуанта промежуточного сектора угол $\delta\varphi$ в $(\cos \frac{\pi y_x}{2})^{-1} \sim 10^1$ раз больше.

Обратимся ко второй из поправок (3. 29). Вычисление, учитывающее (3. 22) и (3. 27), дает

$$\operatorname{Sp} \delta^{(2)} M(\pi|0) = 2L_{22}^2 \cos \pi \nu_x \approx -2L_{22}^2. \quad (4. 14)$$

Подставляя этот результат в (2. 6), найдем, что параметрический резонанс имеет место при условии

$$\nu_x - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} |L_{22}|. \quad (4. 15)$$

откуда

$$\nu_x - 1 \leq \frac{\varepsilon_+}{2W} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi/4 - \sin 2x}{2x a_1 \cos^2 \alpha} = \frac{\lambda g_0}{4n} 0,073 \quad (4. 16)$$

или, для варианта (А),

$$0,039 \leq 0,055 \frac{1}{n} \quad (4.17)$$

(n — абсолютное число оборотов.)

Неравенство (4.17) в обычных условиях не выполняется, так как инжекция происходит при $n \sim 10^1$ (в варианте (4.8) $n \geq 3$). Кроме того, не исключено, что указанный резонансный механизм может подавляться орбитальным целевым эффектом. Таким образом, мы приходим к выводу, что резонанс (4.15) не представляет никакой реальной опасности. Возможно, он вообще ненаблюдаем. (Выяснение последнего вопроса требует численных расчетов.)

5. Геометрия и динамика ступенчатой модели. Условимся отмечать индексами 1, 2 все величины, относящиеся к магнитному и промежуточному секторам соответственно. Пусть $H_{1,2}$ — абсолютная величина магнитного поля (вектор поля направлен по $-e_z$); $H_2 = \kappa H_1$; $K_{1,2} = R_{1,2}^{-1} = eH_{1,2}/cp$ — кривизна замкнутой равновесной орбиты; $\varphi_{1,2}$ — угловой растор сектора; $\nu_{1,2}$ — угол поворота равновесной орбиты в секторе; $\nu_1 + \nu_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi/N$, N — число магнитных секторов;

$$\langle H \rangle = \frac{H_1 R_1 \nu_1 + H_2 R_2 \nu_2}{R_1 \nu_1 + R_2 \nu_2} \equiv \frac{H_1}{u_1}; \quad u_1 = 1 + \frac{1 - \kappa}{\kappa} \cdot \frac{\nu_2 N}{2\pi}; \quad (5.1)$$

$\langle H \rangle$ — магнитное поле, усредненное вдоль равновесной орбиты; $u_{1,2} = K_{1,2}/K_0$; $K_0 = \omega_0/v$; $\omega_0 = e\langle H \rangle/m_0c$; $L_1 = R_{\max} - R_1$, $L_2 = R_2 - R_{\min}$; $R_{\min, \max}$ — минимальное и максимальное расстояния равновесной орбиты до центра циклотрона; R_r — значение $R(\varphi)$ на границе секторов; $R(\varphi)$ — равновесная орбита; $\Psi(\varphi)$ — угол, определяемый из $\text{tg } \Psi(\varphi) = R'(\varphi)/R(\varphi)$; α — абсолютное значение угла Ψ на границе секторов (рис. 2).

В практических расчетах удобно использовать сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\nu_1}{2} &= c_{1/2}, & \sin \frac{\nu_1}{2} &= s_{1/2}, & \cos \frac{\varphi_1}{2} &= c_{\varphi 1/2}, & \sin \frac{\varphi_1}{2} &= s_{\varphi 1/2}, \\ \cos \frac{\nu_2}{2} &= c_{2/2}, & \sin \frac{\nu_2}{2} &= s_{2/2}, & \cos \frac{\varphi_2}{2} &= c_{\varphi 2/2}, & \sin \frac{\varphi_2}{2} &= s_{\varphi 2/2}, \\ \cos \alpha &= c_\alpha, & \sin \alpha &= s_\alpha, & \cos \varphi_\pm &= c_\pm, & \sin \varphi_\pm &= s_\pm, \\ \varphi_+ &= (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = \pi/N, & & & \cos 2\varphi_\pm &= c_{2\varphi_\pm}, & \sin 2\varphi_\pm &= s_{2\varphi_\pm}, \\ \varphi_- &= (\varphi_1 - \varphi_2)/2, & \varphi_1 &= \varphi_+ + \varphi_-, & \varphi_2 &= \varphi_+ - \varphi_-. \end{aligned}$$

В этих обозначениях тригонометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} s_+ + s_- &= 2s_{\varphi 1/2}c_{\varphi 2/2}, & c_- + c_+ &= 2c_{\varphi 1/2}c_{\varphi 2/2}, \\ s_+ - s_- &= 2c_{\varphi 1/2}s_{\varphi 2/2}, & c_- - c_+ &= 2s_{\varphi 1/2}s_{\varphi 2/2}, \\ c_{1/2} &= c_{\varphi 1/2}c_\alpha - s_{\varphi 1/2}s_\alpha, & c_{2/2} &= c_{\varphi 2/2}c_\alpha + s_{\varphi 2/2}s_\alpha, \\ s_{1/2} &= s_{\varphi 1/2}c_\alpha + c_{\varphi 1/2}s_\alpha, & s_{2/2} &= s_{\varphi 2/2}c_\alpha - c_{\varphi 2/2}s_\alpha. \end{aligned}$$

При заданных $\varphi_{1,2}$ неизвестные $\nu_{1,2}$ находятся по формулам

$$\text{tg } \frac{\nu_1}{2} = \frac{s_+}{c_+ + \kappa s_{\varphi 2/2}/s_{\varphi 1/2}}, \quad \text{tg } \frac{\nu_2}{2} = \frac{s_+}{c_+ + s_{\varphi 1/2}/\kappa s_{\varphi 2/2}}. \quad (5.2)$$

Эти выражения решают в принципе все геометрические вопросы. Практически, однако, важно придерживаться определенной последовательности действий. Привлекая соотношения

$$\frac{\nu_1}{2} = \frac{\varphi_1}{2} + \alpha, \quad \frac{\nu_2}{2} = \frac{\varphi_2}{2} - \alpha, \quad (5.3)$$

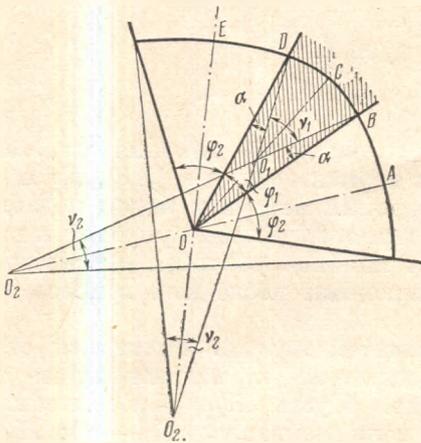


Рис. 2. Ступенчатая модель секции секторного циклотрона (магнитный сектор и два прилегающих промежутка)

O — центр циклотрона; OBD — магнитный сектор; $ABCDE$ — равномерная орбита; $A \rightarrow E$ — направление движения частицы $L_1 = OO_1$, $L_2 = OO_2$, $O_1B = R_1 = K_1^{-1}$, $O_2B = R_2 = K_2^{-1}$, $OB = R_r$; $M(E|D) = \overline{M}_{2/2}$, $M(D|C) = M_{1/2}$, $M(C|B) = \overline{M}_{1/2}$, $M(B|A) = M_{2/2}$.

следует прежде всего получить из (5. 2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1-x) s_{\varphi_{1/2}} s_{\varphi_{2/2}}}{s_{\varphi_{1/2}} c_{\varphi_{2/2}} + x c_{\varphi_{1/2}} s_{\varphi_{2/2}}} = \frac{(1-x)(c_- - c_+)}{(1+x)s_+ + (1-x)s_-}. \quad (5.4)$$

Это ключевая формула. Все встречающиеся ниже величины выглядят особенно просто, если выражать их через $\varphi_{1,2}$ и α .

Приведем для справок некоторые выражения

$$\begin{aligned} K_1 L_1 &= \frac{s_\alpha}{s_{\varphi_{1/2}}}, & K_2 L_2 &= \frac{s_x}{s_{\varphi_{2/2}}}, & K_1 R_r &= \frac{s_{1/2}}{s_{\varphi_{1/2}}}, & K_2 R_r &= \frac{s_{2/2}}{s_{\varphi_{2/2}}}, \\ \frac{s_{2/2}}{s_{\varphi_{2/2}}} &= x \frac{s_{1/2}}{s_{\varphi_{1/2}}}, & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{K_1 L_1 s_{1/2}}{1 + K_1 L_1 c_{1/2}} = \frac{K_2 L_2 s_{2/2}}{1 - K_2 L_2 c_{2/2}}, \\ (1 + K_2 L_2)(1 - c_{2/2}) &= \frac{s_{2/2}}{s_{\varphi_{2/2}}}(c_\alpha - c_{\varphi_{2/2}}), & (1 - K_1 L_1)(1 - c_{1/2}) &= \\ &= \frac{s_{1/2}}{s_{\varphi_{1/2}}}(c_\alpha - c_{\varphi_{1/2}}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} 1 - K_2 L_2 c_{2/2} &= x(1 + K_1 L_1 c_{1/2}), & [] &\equiv (1+x)s_+ + (1-x)s_-, \\ x s_{2\varphi_+} + (1-x)s_{\varphi_1} &= [](c_+ + s_+ \operatorname{tg} \alpha), & s_{2\varphi_+} - (1-x)s_{\varphi_2} &= \\ &= [](c_+ - s_+ \operatorname{tg} \alpha), \end{aligned}$$

$$K_0 R_r \cos \alpha = \frac{s_{2/2} c_\alpha}{u_2 s_{\varphi_{2/2}}} = \frac{1}{u_2} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) c_\alpha^2,$$

$$(1 + K_2 R_r \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha = \left(1 + \frac{s_{2/2} c_\alpha}{s_{\varphi_{2/2}}} \right) \operatorname{tg} \alpha = \left[1 + \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) c_\alpha \right] \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассмотрим сначала невозмущенные матрицы движения. Учитывая, что в однородном поле соотношение $d\vartheta = d\nu/u$, вытекающее из $d\vartheta = K_\alpha ds$ и $ds = d\nu/K$, переходит в $\vartheta = \nu/u + \text{const}$, и выполняя необходимое интегрирование по времени, получим

$$M_{2/2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s_{\varphi_{2/2}}}{v c_\alpha} & \frac{c_\alpha - c_{\varphi_{2/2}}}{v u_2 c_\alpha} \\ 0 & c_{2/2} & \frac{1}{u_2} s_{2,2} \\ 0 & -u_2 s_{2/2} & c_{2/2} \end{pmatrix}, \quad M_{2/2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s_\alpha + c_\alpha s_{2/2}}{v c_\alpha} & \frac{1 - c_{2/2}}{v u_2} \\ 0 & c_{2/2} & \frac{1}{u_2} s_{2/2} \\ 0 & -u_2 s_{2/2} & c_{2/2} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$M_2 = M_{2/2} \bar{M}_{2/2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2s_{\varphi 2/2} c_{2/2}}{v c_\alpha} & \frac{2s_{\varphi 2/2} s_{2/2}}{v u_2 c_\alpha} \\ 0 & c_2 & \frac{1}{u_2} s_2 \\ 0 & -u_2 s_2 & c_2 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & u_1 g & 1 \end{pmatrix}, \quad g = (1 - \kappa) \operatorname{tg} \alpha, \quad \bar{G}^{-1} = G; \quad (5.7)$$

$$M_{2/2}^{-1} G M_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_2 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{M}_{1/2}^{-1} G M_{2/2} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 y_2 - \tau_2 y_1 & \tau_1 x_2 - \tau_2 x_1 \\ 0 & y_2 & x_2 \\ 0 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\bar{M}_{1/2}^{-1} M_1 M_{2/2} = \bar{M}_{2/2}^{-1} G M_{1/2} \bar{M}_{1/2}^{-1} G M_{2/2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\tau_1 y_2 & 2\tau_1 x_2 \\ 0 & x_1 y_2 + y_1 x_2 & 2x_1 x_2 \\ 0 & 2y_1 y_2 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \rho^{-1} \sin \frac{2\pi v_x}{N} & \beta \rho \left(1 - \cos \frac{2\pi v_x}{N}\right) \\ 0 & \cos \frac{2\pi v_x}{N} & \rho^2 \sin \frac{2\pi v_x}{N} \\ 0 & -\rho^{-2} \sin \frac{2\pi v_x}{N} & \cos \frac{2\pi v_x}{N} \end{pmatrix};$$

$$\tau_1 = \frac{(1 + \kappa) s_+ + (1 - \kappa) s_-}{2v\kappa c_\alpha^2} \left(1 - \frac{s_\alpha}{s_{\varphi 2/2}}\right),$$

$$\tau_2 = \frac{1}{v u_2} \left[\kappa + (1 - \kappa) \frac{c_{\varphi 1/2}}{c_\alpha} - (c_+ + s_+ \operatorname{tg} \alpha) \right], \quad (5.9)$$

$$x_1 = c_+ - s_+ \operatorname{tg} \alpha, \quad y_1 = -\frac{u_1}{2c_\alpha^2} [(1 + \kappa) s_+ + (1 - \kappa) s_-],$$

$$x_2 = \frac{2s_+^2}{u_1 [(1 + \kappa) s_+ + (1 - \kappa) s_-]}, \quad y_2 = c_+ + s_+ \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\cos \frac{2\pi v_x}{N} = 1 - \frac{2s_+^2}{c_\alpha^2} = \frac{c_{2\varphi_+} - s_{2\varphi_+}^2}{c_\alpha^2}, \quad \rho^2 \sin \frac{2\pi v_x}{N} = \frac{4s_+^2 (c_+ - s_+ \operatorname{tg} \alpha)}{u_1 [(1 + \kappa) s_+ + (1 - \kappa) s_-]} =$$

$$= \frac{4s_+^2}{u_1} \cdot \frac{s_{2\varphi_+} - (1 - \kappa) s_{\varphi_+}}{[(1 + \kappa) s_+ + (1 - \kappa) s_-]^2}; \quad \beta \rho = \frac{1}{v u_2} \left(1 - \frac{s_\alpha}{s_{\varphi 2/2}}\right). \quad (5.10)$$

Здесь ρ , β — невозмущенные амплитуды Флоке на биссектрисе любого из промежуточных секторов, т. е. при $\varphi=0$, $2\pi/N$, $4\pi/N$ и т. д.; v_x — частота радиальных бетатронных колебаний.

В пределе $\kappa \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{v_x}{x} \rightarrow 2 \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad \frac{H_1}{\langle H \rangle} \equiv u_1 \rightarrow 1 + \frac{N}{\pi} \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad \beta \rho \rightarrow \frac{1}{v u_1} \cos \frac{\varphi_2}{2}. \quad (5.11)$$

В случае 45-градусных секторов и дуантов роль возмущения играют матрицы Γ и $\bar{\Gamma}$:

$$\Gamma = -\frac{\varepsilon_+}{2W} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_0 R_r \cos \alpha & 0 & 0 \\ (1 + K R_r \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для отличных от нуля элементов эффективной целевой матрицы (3.27) вычисление дает

$$L_{11} = \frac{\varepsilon_+}{2W} \cdot \frac{v \beta \rho \sin \pi/8}{\cos \alpha}, \quad L_{13} = -\frac{\varepsilon_+}{2W} \frac{\beta \rho \sin \pi/8 (\cos \pi/8 - \cos \alpha)}{u_2 \cos^2 \alpha},$$

$$L_{22} = -\frac{\varepsilon_+}{2W} \frac{\sin \pi/4 - \sin 2\alpha}{2u_2 \cos^2 \alpha}, \quad L_{31} = -\frac{\varepsilon_+}{2W} \cdot \frac{v \sin \pi/8}{\cos \alpha}, \quad (5.12)$$

$$L_{33} = -\frac{\varepsilon_+}{2W} \cdot \frac{\sin \pi/8 (\cos \alpha - \cos \pi/8)}{u_2 \cos^2 \alpha}.$$

Можно убедиться путем непосредственной проверки, что элементы (5.12) действительно удовлетворяют соотношениям (3.28).

Пример расчета некоторых величин для ступенчатой модели секторного циклотрона типа [2] с $N=4$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4$.

Имеем

$$c_- = 1, \quad s_- = 0, \quad c_+ = s_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{2\varphi_+} = 0, \quad s_{2\varphi_+} = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = (\sqrt{2} - 1) \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} = 0,249, \quad \alpha = 14^\circ,$$

$$\sin \alpha = 0,242, \quad \sin 2\alpha = 0,469, \quad \frac{\nu_1}{2} = \frac{\pi}{8} + \alpha = 36,5^\circ,$$

$$\cos \alpha = 0,970, \quad \cos^2 \alpha = 0,94, \quad \frac{\nu_2}{2} = \frac{\pi}{8} - \alpha = 8,5^\circ,$$

$$\cos \frac{\pi\nu_x}{2} = -\operatorname{tg}^2 \alpha = -0,062, \quad \nu_x = 1,039, \quad (5.13)$$

$$\sin \frac{\pi(\nu_x - 1)}{2} = \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,062, \quad u_1 = 1,57,$$

$$\rho^2 \sin \frac{\pi\nu_x}{2} = \frac{2(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{u_1(1 + \kappa)} = 0,765,$$

$$\rho\beta = \frac{\sin \pi/8 - \sin \alpha}{v u_1 \sin \pi/8} = \frac{0,937}{v}.$$

Часть величин, зависящих от κ , написана здесь сначала для произвольного κ , а затем для $\kappa=0,25$.

При $q_0 = 2$, $q_0 \omega_0 = 2\pi \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$, $4\Delta W = 305 \text{ кэВ}$, $m_0 c^2 = 938 \text{ МэВ}$

$$D = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{4\Delta W}{2m_0}} = 12,2 \text{ см}. \quad (5.14)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. H. L. Hagedoorn, N. F. Verster. Nucl. Instrum. and Methods, 18-19, 201 (1962).
2. И. Я. Барут, Г. А. Васильев и др. Труды VII Международной конференции по ускорителям (Ереван, 1969), 1. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, стр. 324 (1970).
3. Е. М. Мороз. Атомная энергия, 28, 143 (1970).
4. R. N. Litvinovsky, O. A. Minyaev. Proc. of V. Internat. Cyclotron Conf. Oxford, 1969; Butterworths, London, 1971.
5. В. Н. Канунников, А. А. Коломенский, В. А. Попадичев, А. П. Фатеев. Препринт ФИАН № 150 (1970).
6. В. П. Дмитриевский, В. В. Кольга, Н. И. Полумордвинова. Препринт ОИЯИ, № 13-4496, 36 (1969).
7. Ю. К. Хохлов. Атомная энергия, 29, 39 (1970).
8. Ю. К. Хохлов. Атомная энергия, 30, 451 (1971).
9. Ю. К. Хохлов. Атомная энергия, 31, 626 (1971).
10. Ю. К. Хохлов. Труды II Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Москва, 1970; М., «Наука», 1972, стр. 64.
11. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.

В. С. ВОРОНИН, А. А. КОЛОМЕНСКИЙ, А. Н. ЛЕБЕДЕВ

**АВТОРЕЗОНАНС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ
И ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ****ВВЕДЕНИЕ**

Различные аспекты взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами представляют большой интерес для ряда областей физики, таких, как радиофизика, ускорители, физика плазмы, космофизика. К одному из наиболее фундаментальных взаимодействий такого рода относится движение частицы в плоской электромагнитной волне. Ускорение частицы при этом происходит под действием сил, квадратичных и линейных по полю. Квадратичная сила, связанная с радиационными эффектами, обуславливает световое давление, т. е. передачу энергии от волны частице. Эта сила, характеризующаяся обычно томсоновским поперечным сечением, как правило, очень мала.

Что касается сил, линейных по полю, то, если отвлечься от радиационных эффектов, они вообще не приводят в среднем к изменению энергии частиц. Последняя осциллирует около некоторого постоянного значения с амплитудой, зависящей от напряженности поля в волне. Частица при этом описывает траекторию в форме цифры 8 (для плоскополяризованной волны) или окружности (в случае круговой поляризации). Центр траектории перемещается с постоянной скоростью, определяемой начальными условиями и параметрами волны.

Эти факты достаточно хорошо известны (см., например, [1, 2]). Гораздо менее известно то, что при определенных условиях эффективность взаимодействия плоской волны и частицы может существенно возрасти и приобрести резонансный характер. При этом либо энергия частицы будет намного увеличиваться, либо волна будет усиливаться. Возможность возникновения такого эффекта при наложении постоянного магнитного поля и соблюдении некоторых дополнительных требований была впервые указана в работах [3—6], в которых была дана и теория явления. В работах [4, 5] были также рассмотрены вопросы авторезонансного взаимодействия волны и частицы при наличии магнитного поля в средах (в том числе анизотропных) и некоторые модификации этого взаимодействия в неоднородном ВЧ-поле и в волноводах.

Важно, что резонанс волны и частицы в магнитном поле поддерживается автоматически, несмотря на существенное изменение гиромангнитной частоты, соответствующее изменению энергии (массы) частицы. Поэтому рассматриваемое явление было названо авторезонансом волны и частицы. Накладывая постоянное продольное магнитное поле $H_0 = \text{const}$, мы вводим некоторую собственную частоту — гиромангнитную частоту $\omega_H = qH_0/mc\gamma$, где q — заряд, γ — релятивистский фактор. Электромагнитная волна, играющая роль внешней силы, действует на частицу, движущуюся с продольной скоростью $v_z = c\beta_z$, с частотой $\omega_q = \omega(1 - \beta_z)$, где ω — частота волны. Таким образом, частота внешней силы ω_q и собственная частота ω_H

существенно изменяются с энергией частицы. Тем не менее выбором начальных значений параметров можно тождественно выполнить условие резонанса $\omega_q = \omega_H$, поскольку при движении частицы в волне (как при наличии продольного магнитного поля, так и без него) существует инвариант $\gamma(1 - \beta_z) = \text{Inv} = \text{const}$. Этот инвариант, который получается из уравнений движения частицы в волне, непосредственно следует из закона сохранения энергии и продольной составляющей импульса для системы частица—волна и частица—фотон.

Вслед за указанными выше работами появился ряд исследований, где представления об авторезонансном механизме развивались дальше в теоретическом [7—11] и экспериментальном [12, 13] направлениях. Отметим, что первые работы по авторезонансу инициировали также серию работ по другому механизму усиления взаимодействия волны и частицы. Последний связан с нарушением строгой периодичности системы и изменением скорости волны v , магнитного поля H_0 и других параметров либо по специальному закону [14—17], либо достаточно медленно по произвольному закону [18, 19]. Этому вопросу мы коснемся лишь кратко (см. § 3).

Настоящая работа не ставит своей задачей дать полный обзор авторезонанса и различных его применений. Написанная на основе оригинальных работ авторов, она содержит дальнейшее развитие теории и посвящена главным образом выяснению принципиальной физической стороны авторезонансного эффекта и сопутствующих явлений.

§ 1. Основные особенности взаимодействия волны и частицы в магнитном поле. Рассмотрим движение частицы с массой покоя m и зарядом q в поле плоской волны \mathbf{E} , \mathbf{H} при наличии однородного магнитного поля \mathbf{H}_0 , параллельного направлению распространения волны. Для упрощения выкладок введем следующие обозначения:

$$\mathbf{e} = \frac{q\mathbf{E}}{mc^2}; \quad \mathbf{h} = \frac{q\mathbf{H}}{mc^2}; \quad \tau = ct; \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}; \quad \gamma = (1 - \dot{\mathbf{r}}^2)^{-1/2} \quad (1.1)$$

или, другими словами, будем пользоваться системой единиц, в которой масса частицы, ее заряд и скорость света равны единице. Поля \mathbf{e} и \mathbf{h} будут иметь размерность см^{-1} , энергия, импульс и скорость частицы будут безразмерными. В этих переменных уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{d}{d\tau}(\gamma\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{e} + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h}]. \quad (1.2)$$

В декартовой системе координат, в которой ось z совпадает с направлением распространения волны, для полей произвольной плоской волны и внешнего магнитного поля \mathbf{h}_0 справедливы соотношения

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\xi); \quad \xi = \tau - z; \quad \mathbf{h} = [\mathbf{n}\mathbf{e}] + n\mathbf{h}_0; \quad (\mathbf{e}\mathbf{n}) = 0, \quad (1.3)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор вдоль z .

В рассматриваемом случае анализ движения частицы упрощается, если от переменных \mathbf{r} , τ перейти к новым переменным I , \mathbf{p} , ξ , согласно соотношениям

$$\gamma - p_z = \gamma(1 - \dot{z}) = I; \quad \gamma\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} + n p_z; \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{I}{\gamma} \cdot \frac{d}{d\xi}. \quad (1.4)$$

Величина I есть разность между энергией частицы γ и ее продольным импульсом p_z , а двухкомпонентный вектор \mathbf{p} — поперечный импульс частицы.

Уравнения (1.2) в переменных I , \mathbf{p} , ξ примут следующий вид:

$$I \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{\mathbf{p}}{I} + \frac{h_0}{I} [\mathbf{n}\mathbf{p}] = \mathbf{e}(\xi), \quad (1.5a)$$

$$\frac{dI}{d\xi} = 0, \quad (1.5b)$$

причем исходные величины выражаются через новые переменные по формулам

$$p_x = \gamma z = \frac{p^2}{2I} + \frac{1 - I^2}{2I}; \quad \gamma = \frac{p^2}{2I} + \frac{1 + I^2}{2I}; \quad (1.6)$$

$$\tau = \int \frac{\gamma}{I} d\xi; \quad z = \int \left(\frac{p^2}{2I} + \frac{1 - I^2}{2I} \right) d\xi; \quad \mathbf{r}_\perp = \int \frac{\mathbf{p}}{I} d\xi.$$

Уравнение для поперечного импульса (1.5а) является уравнением линейного осциллятора (точнее, ротатора), собственная частота которого равна \hbar_0/I . Как показывает уравнение (1.5б), взаимодействие частицы с волной любой формы происходит таким образом, что разность I между энергией и продольным импульсом частицы остается постоянной. Поэтому собственная частота осциллятора относительно волны также остается постоянной, несмотря на изменение энергии и продольной скорости в процессе движения. Таким образом, если в составе плоской волны имеется резонансная составляющая с частотой $k = \hbar_0/I$ (в используемой системе единиц частота совпадает с волновым числом), то условия резонанса будут все время сохраняться и частица может быть в принципе ускорена до любой энергии. В силу линейности уравнения (1.5а) это не зависит от наличия других, нерезонансных, составляющих. Как было упомянуто во введении, такое явление получило название а в т о р е з о н а н с а.

Вводя комплексные переменные (векторы)

$$\mathbf{p} = p_x + ip_y; \quad \mathbf{e} = e_x + ie_y; \quad [\mathbf{np}] = ip, \quad (1.7)$$

можно записать (1.5а) в другом виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\xi} + i \frac{\hbar_0}{I} \mathbf{p} = \mathbf{e}(\xi). \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.8) запишется следующим образом:

$$\mathbf{p}(\xi) = e^{-i \frac{\hbar_0}{I} \xi} \left[\mathbf{p}(0) + \int_0^\xi e^{i \frac{\hbar_0}{I} \xi} \mathbf{e}(\xi) d\xi \right]. \quad (1.9)$$

Рассмотрим плоскую волну, представляющую собой сумму монохроматических волн с разными частотами и поляризацией:

$$\mathbf{e}(\xi) = \sum_n [\mathbf{e}_{n1} e^{-ik_n \xi} + \mathbf{e}_{n2} e^{ik_n \xi}], \quad (1.10)$$

где \mathbf{e}_{n1} и \mathbf{e}_{n2} — комплексные амплитуды компонент с круговой поляризацией, образующих эллиптически поляризованную монохроматическую волну; k_n — ее волновое число. Подставляя (1.10) в (1.9), получим для этого случая

$$\mathbf{p}(\xi) = e^{-i \frac{\hbar_0}{I} \xi} \left[\mathbf{p}(0) + \sum_n \frac{\mathbf{e}_{n1} \left(e^{i \left(\frac{\hbar_0}{I} - k_n \right) \xi} - 1 \right)}{i \left(\frac{\hbar_0}{I} - k_n \right)} + \sum_n \frac{\mathbf{e}_{n2} \left(e^{i \left(\frac{\hbar_0}{I} + k_n \right) \xi} - 1 \right)}{i \left(\frac{\hbar_0}{I} + k_n \right)} \right]. \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что наибольшее воздействие на частицу оказывает волна, частота которой близка к собственной частоте осциллятора \hbar_0/I , а направление вращения электрического вектора совпадает с направлением вращения частицы в магнитном поле (левополяризованная волна для положительного заряда). Остальные волны, в том числе и компонента резонанс-

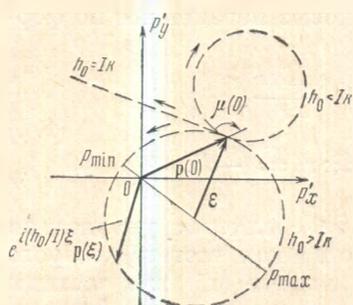


Рис. 1. Векторная диаграмма авторезонансного движения

ной волны с обратным направлением вращения, будут давать сравнительно небольшое периодическое возмущение. Пренебрегая их влиянием, т. е. рассматривая одну монохроматическую волну с круговой поляризацией, получим вместо (1. 11)

$$p(\xi) = e^{-i \frac{\Delta\epsilon}{I} \xi} \left[p(0) + \epsilon \left(e^{i \left(\frac{\Delta\epsilon}{I} - k \right) \xi} - 1 \right) \right], \quad (1. 12)$$

где

$$p(0) = p_0 e^{i\varphi_0}; \quad \epsilon = \frac{e_1}{i \left(\frac{h_0}{I} - k \right)} = \epsilon e^{i\varphi\epsilon}. \quad (1. 13)$$

В этом случае наглядной интерпретацией решения (1. 12) будет векторная диаграмма для поперечного импульса p (рис. 1). Угол $\mu(0)$ на рис. 1 представляет начальный (при $\xi=0$) сдвиг фаз между полем волны и поперечной скоростью частицы. Видно, что при $h_0/I - k \neq 0$ конец вектора p описывает окружность с радиусом ϵ , положение центра которой зависит от $p(0)$ и ϵ ; направление вращения при $h_0/I - k > 0$ — против часовой стрелки, при $h_0/I - k < 0$ — по часовой стрелке. При точном резонансе $h_0/I - k = 0$ и окружность превращается в прямую линию (изохронное движение). При неточном резонансе длина вектора p испытывает периодические колебания между p_{\min} и p_{\max} (см. рис. 1), которым соответствуют колебания энергии γ между γ_{\min} и γ_{\max} (см. формулы (1. 6); величины p_{\min} и p_{\max} легко найти из геометрических соображений по рис. 1). При точном резонансе в зависимости от начального сдвига фаз $\mu(0)$ энергия частицы (вместе с p^2) будет либо все время увеличиваться (при $\mu(0)=0$ или при $p(0)=0$ и любом $\mu(0)$), либо сначала будет уменьшаться, достигнет минимума и затем снова будет увеличиваться. Нулевой поперечной скорости соответствует минимально возможная величина энергии частицы, равная $(1+I^2)/2I$; при этом частица движется вдоль оси z . Очевидно, что полная остановка частицы ($\gamma=1$) возможна только при $I=1$.

Рассмотрим подробнее особенности авторезонансного ускорения. Для нерелятивистской частицы $I=1$ и условие авторезонанса $h_0=Ik$ совпадает с условием обычного циклотронного резонанса $h_0=k$. В обычных обозначениях (для электрона) этому соответствует соотношение

$$H_0 \lambda = \frac{2\pi}{q} m c^2 = 10,71 \text{ кэ} \cdot \text{см}, \quad (1. 14)$$

где λ — длина волны. Однако условие авторезонанса может быть выполнено и при произвольных значениях h_0 и k соответствующим выбором параметра I . Очевидно, что эта возможность связана с эффектом Доплера. Действительно, пусть, например, частица движется вдоль оси z со скоростью \dot{z} . В системе координат, в которой частица неподвижна, значения волнового числа и напряженности магнитного поля будут соответственно равны: $k' = k \sqrt{\frac{1-\dot{z}}{1+\dot{z}}}$, $h'_0 = h_0$, и условию циклотронного резонанса в движущейся системе $h'_0 = k'$ будет соответствовать в исходной системе условие $h_0 = k \sqrt{\frac{1-\dot{z}}{1+\dot{z}}}$, которое, как легко убедиться, совпадает с условием $h_0 = Ik$.

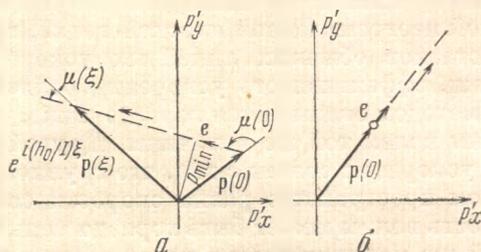
Для точного резонанса решение (1. 12) принимает следующий вид:

$$p(\xi) = e^{-i k \xi} [p(0) + e_1 \xi]. \quad (1. 15)$$

Как видно из векторной диаграммы для этого случая (рис. 2, а), при любом начальном значении угла μ между электрическим полем и поперечной скоростью частицы этот угол стремится в конце концов к нулю и частица входит в режим ускорения. Возьмем для простоты случай, когда этот угол равен нулю с самого начала (см. рис. 2, б), и будем отсчитывать «время» ξ с того момента, когда поперечная скорость частицы равна нулю, т. е. в фор-

Рис. 2. Случай точного резонанса

а — произвольный сдвиг фаз между полем волны и поперечным импульсом, б — нулевой сдвиг фаз



муле (1.15) положим $p(0)=0$. Тогда для наиболее интересных величин получим следующие зависимости:

$$p = e_1 \xi e^{-ik\xi}; \quad kr_{\perp} = \frac{e_1}{Ik} e^{-ik\xi} [1 + ik\xi];$$

$$z = \frac{e_1^2}{6I^2} \xi^3 + \frac{1-I^2}{2I^2} \xi; \quad (1.16)$$

$$\gamma = \frac{e_1^2}{2I} \xi^2 + \frac{1+I^2}{2I}; \quad \gamma z = \frac{e_1^2}{2I} \xi^2 + \frac{1-I^2}{2I}. \quad (1.17)$$

Как видно из (1.16), траектория частицы является спиралью с увеличивающимся радиусом и шагом. Исключив из (1.16), (1.17) параметр ξ , получим следующие зависимости радиуса спирали (при $k\xi \gg 1$) и расстояния z от энергии частицы γ :

$$kr_{\perp} \approx \left(\frac{2}{I}\right)^{1/2} \left(\gamma - \frac{1+I^2}{2I}\right)^{1/2}; \quad e_1 z = \frac{\sqrt{2}}{3} I^{-1/2} \left(\gamma - \frac{1+I^2}{2I}\right)^{1/2} \left(\gamma + \frac{1-2I^2}{I}\right). \quad (1.18)$$

Для скорости прироста энергии по z получим

$$\frac{d\gamma}{dz} = e_1 \sqrt{2} I^{1/2} \left(\gamma - \frac{1+I^2}{2I}\right)^{1/2} (\gamma - I)^{-1} = e_{эф}. \quad (1.19)$$

Из последнего выражения видно, что с увеличением энергии и переходом к релятивистской области эффективность ускорения падает, как $\gamma^{-1/2}$, поскольку увеличивается угол между вектором полной скорости частицы и полем волны (так как продольный импульс увеличивается пропорционально квадрату поперечного импульса). Эффективность ускорения падает также с уменьшением параметра I (как $I^{1/2}$). При $I > 1$ характер движения меняется: частица движется сначала навстречу волне до $\gamma=I$, затем — по волне. Заметим, что при нерелятивистских энергиях эффективность повышается, так как частица раскручивается, мало смещаясь по z , и может брать заметную энергию на коротком расстоянии.

Представляет интерес сравнение авторезонансного ускорителя с обычно применяемыми линейными ускорителями, где используются волны, имеющие продольную составляющую электрического поля E_z . Эти ускорители представляют собой специальные замедляющие системы, например нагретые волноводы, в которых резонансное взаимодействие достигается за счет равенства скорости частицы и фазовой скорости ускоряющей гармонической волны. Диафрагмированные волноводы имеют ряд недостатков: значительные потери высокочастотной мощности из-за большой площади

металлических поверхностей, подверженность пробую, нерациональное распределение поля в пространстве, жесткие допуски на фазовую скорость. Важно, что по известным причинам такие системы практически не допускают перехода к очень коротким длинам волн, а такой переход был бы крайне желателен, учитывая успехи в получении мощных световых пучков с применением лазеров и другой современной техники.

Авторезонансный метод, позволяющий производить ускорение в свободной неограниченной плоской волне, в принципе свободен от указанных недостатков обычных линейных ускорителей. Однако, как показывают оценки, эффективность ускорения релятивистской частицы авторезонансным методом оказывается гораздо ниже, чем волной с продольным электрическим полем той же величины. Другой недостаток авторезонансного метода ускорения связан с тем, что групповая скорость плоской волны в свободном пространстве равна скорости света, а в замедляющем волноводе скорость волны может быть гораздо меньше. Поэтому для получения одной и той же напряженности ускоряющего поля плотность потока мощности в плоской волне должна быть больше, чем в замедляющей системе (волноводе).

Практические возможности авторезонансного метода определяются дальнейшим прогрессом в создании мощных пучков электромагнитных волн и получении сверхсильных магнитных полей.

§ 2. Влияние излучения на динамику частиц в плоской волне и продольном магнитном поле. Электрон, движущийся в электромагнитном поле, излучает электромагнитную энергию, что приводит к появлению действующих на него дополнительных сил, не учитываемых уравнением (1. 2). Сила реакции излучения, которую нужно добавить в правую часть уравнения (1. 2), в единицах (1. 1) имеет следующий вид (см. [1]):

$$\mathbf{f} = g \left\{ \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{i}\nabla \right) \mathbf{e} + \gamma \left[\dot{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{i}\nabla \right) \mathbf{h} \right] + [(\mathbf{e} + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h}]) \mathbf{h}] + \right. \\ \left. + \mathbf{e}(\mathbf{e}\dot{\mathbf{r}}) - \gamma^2 \dot{\mathbf{r}}^2 ((\mathbf{e} + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h}])^2 - (\mathbf{e}\dot{\mathbf{r}})^2) \right\}, \quad (2.1)$$

где множитель g равен

$$g = \frac{2}{3} \cdot \frac{q^2}{mc^2} = 1,878 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (2.2)$$

Для полей (1. 3) компоненты силы реакции излучения равны

$$\mathbf{f}_1 = -g \frac{I^2}{\gamma} \left\{ \left[\left(\frac{h_0}{I} \mathbf{p} + [\mathbf{ne}] \right)^2 + \frac{h_0^2}{I^2} \right] \mathbf{p} + \frac{h_0}{I} [\mathbf{ne}] - \frac{d\mathbf{e}}{d\xi} \right\}, \\ f_x = -g \frac{I}{2\gamma} \left\{ \left(\frac{h_0}{I} \mathbf{p} + [\mathbf{ne}] \right)^2 (p^2 - I^2) + \frac{h_0^2}{I^2} p^2 - 2 \left(\mathbf{p} \frac{d\mathbf{e}}{d\xi} \right) - e^2 \right\}. \quad (2.3)$$

После преобразования к переменным I , \mathbf{p} , ξ уравнения (1. 5) с учетом силы реакции излучения примут следующий вид:

$$I \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{\mathbf{p}}{I} + \frac{h_0}{I} ([\mathbf{np}] + gh_0\mathbf{p}) = \mathbf{e}(\xi) + g \left(I \frac{d\mathbf{e}}{d\xi} - h_0 [\mathbf{ne}] \right); \quad (2.4a)$$

$$\frac{d}{d\xi} \cdot \frac{1}{I} = g \left(\frac{h_0}{I} \mathbf{p} + [\mathbf{ne}] \right)^2. \quad (2.)$$

Основное изменение, которое вносит реакция излучения, состоит в то что собственная частота осциллятора уже не остается постоянной, а монотонно увеличивается со скоростью, примерно пропорциональной квадрату поперечного импульса. Кроме того, излучение вносит в движение осциллятора затухание с весьма малым относительным декрементом gh_0 ; незначительно изменяется и правая часть уравнения осциллятора. Для авто-

резонансного ускорения наиболее существенно изменение собственной частоты, приводящее к расстройке и к ограничению максимальной энергии, которую частица может приобрести при резонансном ускорении. Оценим величину максимальной энергии γ_{\max} , приобретаемой электроном до расстройки резонанса. Пренебрегая в уравнении (2. 4а) весьма малым затуханием и изменением правой части, зависящим от коэффициента g , а в уравнении (2. 4б) — величиной e_1 по сравнению с $(h_0/I)p$, можно получить укороченные уравнения (для монохроматической волны с круговой поляризацией)

$$\frac{dp}{d\xi} = e_1 \cos \mu; \quad \frac{d^2\mu}{d\xi^2} = gh_0 \left(\frac{h_0}{I}\right)^2 p^2. \quad (2. 5)$$

Фаза $\mu = \int \frac{h_0}{I} d\xi - k\xi$ монотонно смещается, согласно (2. 5). Очевидно, что резонанс расстроится при $\Delta\mu \approx 1$; для $\Delta\mu$ из (2. 5) получим выражение

$$\Delta\mu \approx gh_0 (e_1 k)^2 \frac{\xi^4}{12}. \quad (2. 6)$$

При $\Delta\mu \approx 1$

$$p_{\max} \approx I (e_1 k / h_0^2) \sqrt{12 / gh_0}, \quad (2. 7)$$

и для максимальной энергии, полученной частицей при резонансном ускорении, получим значение

$$\gamma_{\max} \approx \frac{e_1}{h_0} \sqrt{\frac{3}{gh_0}} \quad (2. 8)$$

или

$$\gamma_{\max} \approx 1,7 \cdot 10^4 E / H_0^2, \quad (2. 9)$$

где E в $кв/см$, а H_0 в $кэ$.

Как можно убедиться, сделанные предположения и полученная оценка справедливы при условиях

$$g^2 h_0^2 \sqrt{\frac{12}{gh_0}} \ll \frac{e_1}{k} \ll \sqrt{\frac{12}{gh_0}}, \quad (2. 10)$$

которые практически всегда выполняются. При тех значениях параметров, когда авторезонансный метод ускорения оказывается целесообразным, предел, который реакция излучения ставит механизму ускорения, оказывается весьма высоким.

При отсутствии резонанса можно различать два физически выделенных случая. Благодаря излучению частота осциллятора монотонно возрастает. Поэтому, если вначале она была меньше резонансной, то в дальнейшем частица обязательно пройдет через резонансную область и получит значительное приращение энергии ($\sim \gamma_{\max}$). Если же начальная частота больше резонансной, то частица никогда не пройдет через резонанс.

В нерезонансной области учет влияния реакции излучения приводит, как известно, к выводу о существовании отличной от нуля средней силы, действующей на заряд, — силы давления, которая в отсутствие магнитного поля и для волны с малой интенсивностью выражается хорошо известной формулой Томсона (см. [1]).

В случае отсутствия резонанса, если не учитывать силу реакции излучения, частица совершает периодическое движение, двигаясь в среднем прямолинейно и равномерно вдоль магнитного поля. Найдем среднюю скорость этого движения. Для этого удобно перейти от усреднения по

времени τ к усреднению по приведенному времени ξ . Этот переход производится следующим образом:

$$\langle \dot{z} \rangle_\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\tau \dot{z} d\tau}{\int_0^\tau d\tau} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\xi \frac{\gamma}{I} \dot{z} d\xi}{\int_0^\xi \frac{\gamma}{I} d\xi} = \frac{\langle \frac{\gamma \dot{z}}{I} \rangle_\xi}{\langle \frac{\gamma}{I} \rangle_\xi}. \quad (2.11)$$

С помощью формул (1. 6) получим

$$\langle \gamma \dot{z} \rangle_\xi = \frac{1}{2I} \langle p^2 \rangle_\xi + \frac{1 - I^2}{2I}; \quad \langle \gamma \rangle_\xi = \frac{1}{2I} \langle p^2 \rangle_\xi + \frac{1 + I^2}{2I}, \quad (2.12)$$

откуда средняя скорость движения по z равна

$$\langle \dot{z} \rangle_\tau = \frac{1 + \langle p^2 \rangle_\xi - I^2}{1 + \langle p^2 \rangle_\xi + I^2}. \quad (2.13)$$

Учтем теперь реакцию излучения. Пусть \mathbf{e} (ξ) представляет собой монохроматическую плоскую волну с эллиптической поляризацией

$$e_x = (e_1 + e_2) \cos k\xi; \quad e_y = (e_2 - e_1) \sin k\xi. \quad (2.14)$$

Чтобы учесть средний результат действия излучения, недостаточно усреднить по времени z -компоненту силы реакции излучения f_z , поскольку под действием этой силы изменяются также и параметры движения и эти изменения имеют тот же порядок величины. Поэтому мы определим радиационную силу как производную от продольного импульса частицы при ее действительном движении с учетом силы реакции излучения. Таким образом, радиационная сила будет вычисляться по формулам

$$F_{\text{рад}} = \left\langle \frac{d}{d\tau} \gamma \dot{z} \right\rangle_\tau = \left\langle \frac{\mathbf{e} \mathbf{p}}{\gamma} + f_z \right\rangle_\tau = \frac{\left\langle \frac{\mathbf{e} \mathbf{p}}{I} + \frac{\gamma f_z}{I} \right\rangle_\xi}{\langle \gamma / I \rangle_\xi}. \quad (2.15)$$

Уравнения (2. 4) достаточно решить в первом порядке по весьма малой константе излучения g . Положим для этого

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + g \mathbf{p}_1; \quad \frac{1}{I} = \frac{1}{I_0} + g j_1 \quad (2.16)$$

и получим для \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , j_1 решения

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \Lambda \left(\frac{\hbar_0}{I_0} \xi \right) \left[\mathbf{p}_{00} + \int \Lambda \left(-\frac{\hbar_0}{I_0} \xi \right) \mathbf{e} d\xi \right]; \\ j_1 &= \int \left(\frac{\hbar_0}{I_0} \mathbf{p}_0 + [\mathbf{n} \mathbf{e}] \right)^2 d\xi; \\ \mathbf{p}_1 &= \Lambda \left(\frac{\hbar_0}{I} \xi \right) \int \Lambda \left(-\frac{\hbar_0}{I} \xi \right) \left\{ I_0 \frac{d\mathbf{e}}{d\xi} - \hbar_0 j_1 [\mathbf{n} \mathbf{p}_0] - \hbar_0 [\mathbf{n} \mathbf{e}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hbar_0^2}{I_0} \mathbf{p}_0 - I_0 \left(\frac{\hbar_0}{I_0} \mathbf{p}_0 + [\mathbf{n} \mathbf{e}] \right)^2 \mathbf{p}_0 \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $I_0 = \text{const}$, $\mathbf{p}_{00} = \text{const}$, а через Λ (φ) обозначен оператор поворота на угол φ с матрицей

$$\Lambda(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Формулы (2. 17) содержат закон движения частицы с учетом реакции излучения. Для определения радиационной силы необходимо усреднить

по времени производную от продольного импульса частицы при действительном движении. Подставляя в (2. 15) выражения (2. 17) и проводя усреднение, получим после ряда преобразований искомую формулу для средней радиальной силы, действующей на частицу:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{рад}} = & gh_0^2 \langle \dot{z} \rangle \left[1 - I^2 \frac{1 + \langle \dot{z} \rangle}{1 - \langle \dot{z} \rangle} \right] + g \left[\left(\frac{e_1}{1-a} \right)^2 + \left(\frac{e_2}{1+a} \right)^2 \right] \times \\
 & \times \left[\frac{h_0^2}{k^2} \langle \dot{z} \rangle + I^2 \right] + g (1 - \langle \dot{z} \rangle) \left[1 - I^2 \frac{1 + \langle \dot{z} \rangle}{1 - \langle \dot{z} \rangle} \right] \left[\frac{e_1^2}{(1-a)^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{e_2^2}{(1+a)^3} \right] + g \left[\left(\frac{e_1}{1-a} \right)^2 + \left(\frac{e_2}{1+a} \right)^2 \right] \frac{1 - \langle \dot{z} \rangle}{k^2} \times \\
 & \times \left[\frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{e_1^2}{(1-a)^2} + \frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{e_2^2}{(1+a)^2} \right]; \quad a = \frac{h_0}{Ik}, \quad (2. 19)
 \end{aligned}$$

где параметр p_{00} выражен через среднюю продольную скорость частицы $\langle \dot{z} \rangle$ с помощью (2. 13). Поскольку мы определили $F_{\text{рад}}$ согласно (2.15), то в выражение (2.19) вошло слагаемое

$$F_{h_0} = gh_0^2 \langle \dot{z} \rangle \left[1 - I^2 \frac{1 + \langle \dot{z} \rangle}{1 - \langle \dot{z} \rangle} \right] = -gh_0^2 \dot{z} p^2, \quad (2. 20)$$

которое не зависит от поля волны и соответствует потерям энергии частицы при движении в наложенном магнитном поле H_0 (реакция синхротронного излучения). Как видно, F_{h_0} всегда направлена против скорости частицы. Если магнитное поле гораздо больше резонансного значения, это слагаемое становится определяющим в выражении для $F_{\text{рад}}$.

Если магнитное поле H_0 отсутствует, то радиационная сила (2. 19) будет силой давления волны на свободную частицу:

$$F_{\text{дав.л}} = g (1 - \langle \dot{z} \rangle) (e_1^2 + e_2^2) \left[1 - I^2 \frac{\langle \dot{z} \rangle}{1 - \langle \dot{z} \rangle} + \left(\frac{e_1}{k} \right)^2 + \left(\frac{e_2}{k} \right)^2 \right] \quad (2. 21)$$

(в системе координат, в которой частица движется в среднем только вдоль оси z). Из формулы (2. 19) видно, что с приближением напряженности магнитного поля к резонансному значению средняя радиационная сила растет и при достаточной близости к резонансу может значительно превышать силу давления волны на свободную частицу (2. 21). Очевидно, это связано с возрастанием амплитуды колебаний поперечного импульса, а вместе с ней и мощности, излучаемой частицей.

По поводу формул (2. 19), (2. 21) следует отметить, что радиационная сила пропорциональна плотности энергии волны e^2 только для волны с малой интенсивностью, т. е. при $e^2/k^2 \ll (1-a)^2$. При этом условии частица совершает нерелятивистское движение в системе координат, в которой она в среднем покоится. Для волн с большой интенсивностью или для весьма длинных волн, когда $e^2/k^2 > (1-a)^2$, радиационная сила растет пропорционально квадрату плотности энергии волны. При этом движение частицы становится релятивистским даже в системе координат, где она в среднем покоится, и мощность излучения сильно возрастает.

Формула (2. 21) является обобщением формулы Томсона для эффективного сечения рассеяния электромагнитной волны заряженной частицей на случай волны большой интенсивности. При $\langle \dot{z} \rangle = 0$ эту формулу можно переписать в виде

$$\sigma = \sigma_T \left(1 + \frac{e_1^2 + e_2^2}{k^2} \right), \quad (2. 22)$$

где $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$ — обычное томсоновское сечение.

§ 3. Взаимодействие частиц с медленными и быстрыми волнами. Рассмотрим общий случай плоской волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля с произвольной фазовой скоростью βc ($\beta \leq 1$), что может иметь место в различных средах. Кроме того, этот случай близок к некоторым вариантам взаимодействия частицы с волнами в волноводах.

По сравнению с исходными уравнениями § 1 надо изменить определение фазовой переменной ξ , сохраняя за ней прежний физический смысл

$$\xi = \beta\tau - z, \quad (3.1)$$

и учесть, что теперь

$$\mathbf{h} = n\mathbf{h}_0 + \beta^{-1}[\mathbf{n}\mathbf{e}]. \quad (3.2)$$

При этом уравнение поперечного движения принимает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\xi} + \frac{h_0}{\gamma(\beta - \dot{z})}[\mathbf{n}\mathbf{p}] = \beta^{-1}\mathbf{e}, \quad (3.3)$$

а продольного —

$$\gamma\beta(\beta - \dot{z})\frac{d}{d\xi}\gamma\dot{z} = p\mathbf{e}. \quad (3.4)$$

Поскольку $p\mathbf{e} = \gamma\frac{d\dot{\gamma}}{d\tau} = \gamma(\beta - \dot{z})\frac{d\dot{\gamma}}{d\xi}$, то из продольного уравнения следует, что интегралом движения является

$$I = \gamma(1 - \beta\dot{z}). \quad (3.5)$$

Таким образом, разность между энергией и продольным импульсом частицы уже не сохраняется. Физической причиной этого является неравенство электрической и магнитной составляющих электромагнитной волны. В свою очередь из-за этого не остается постоянным коэффициент при величине $[\mathbf{n}\mathbf{p}]$ в поперечном уравнении (3.3), что означает невозможность точного резонанса в течение неопределенно большого времени при любом выборе параметра h_0 .

Пользуясь кинематическим соотношением

$$\gamma^{-2} = 1 - \dot{z}^2 - p^2/\gamma^2 \quad (3.6)$$

и интегралом движения (3.5), целесообразно выразить этот коэффициент через абсолютную величину поперечного импульса p . Тогда получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\xi} \mp h_0 [I^2 - (1 - \beta^2)(1 + p^2)]^{-1/2} [\mathbf{n}\mathbf{p}] = \beta^{-1}\mathbf{e}. \quad (3.7)$$

Верхний знак в этом уравнении соответствует движению при $\dot{z} > \beta$, что может реализоваться только в медленной волне. Отметим, кстати, что при этом эффективное резонансное ускорение осуществляется волной обратной круговой поляризации. В случае быстрой волны всегда $\dot{z} < \beta$ и знак перед радикалом положительный.

С точки зрения рассматриваемых резонансных явлений уравнение поперечного движения (3.7) описывает нелинейную колебательную (точнее, вращательную) систему, собственная частота которой зависит от амплитуды p . В случае медленной волны система обладает жесткой характеристикой (частота растет с амплитудой), в случае быстрой волны — мягкой. С этим обстоятельством и связана, собственно, невозможность точного резонанса и монотонного изменения энергии. Поэтому при $\beta^2 \neq 1$ следует ожидать более или менее глубоких биений энергии, в процессе которых модулируются также продольная скорость и радиус траектории.

Некоторые сведения о движении можно получить непосредственно из существования интеграла (3.5), не прибегая к решению уравнения.

Прежде всего нетрудно видеть, что бесконечно большому возрастанию энергии соответствует $\dot{z} \rightarrow \beta^{-1}$, что принципиально возможно только в быстрой волне. Отметим, что продольная скорость всегда остается по ту сторону β^{-1} , где она задана начальными условиями, но при $\dot{z} < \beta^{-1}$ ускорение сопровождается ростом продольной скорости, а при $\dot{z} > \beta^{-1}$ — ее уменьшением. Таким образом, в случае движения в быстрой волне энергия частицы может достигать в принципе сколь угодно больших значений, если только амплитуда волны достаточно велика.

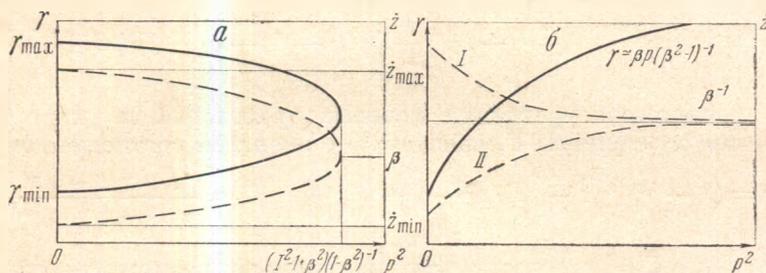


Рис. 3. Схематическая зависимость энергии (сплошная кривая) и продольной скорости (штриховая) от поперечного импульса

$a - \beta < 1$, $b - \beta > 1$: $I - J > 0$, $II - J < 0$. Значение \dot{z} при $p = 0$ равно $[(J^2 + \beta^2 - 1)^{1/2} - J\beta] \times [\beta(J^2 + \beta^2 - 1)^{1/2} - J]^{-1}$

В случае медленной волны бесконечная энергия вообще не может быть достигнута ни при каких значениях электрического поля. Максимальное и минимальное значения энергии достигаются при $p = 0$, т. е. в моменты движения вдоль магнитного поля. Эти значения равны соответственно

$$\gamma_{\min}^{\max} = (1 - \beta^2)^{-1} [I \pm \beta (I^2 - 1 + \beta^2)^{1/2}]. \quad (3.8)$$

При этом $p = 0$ и

$$\dot{z} = \dot{z}_{\min}^{\max} = [I\beta \pm (I^2 - 1 + \beta^2)^{1/2}] [I \pm \beta (I^2 - 1 + \beta^2)^{1/2}]^{-1} \geq \beta. \quad (3.9)$$

В этих же пределах, естественно, могут варьироваться и начальные условия, соответствующие заданной величине I . Схематические зависимости энергии и продольной скорости от поперечного импульса приведены на рис. 3. Нетрудно получить, что эти зависимости выражаются формулами

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1} [I \pm \beta (I^2 - (1 - \beta^2)(1 + p^2))^{1/2}]; \quad (3.10)$$

$$\dot{z} = [I\beta \pm (I^2 - (1 - \beta^2)(1 + p^2))^{1/2}] [I \pm \beta (I^2 - (1 - \beta^2)(1 + p^2))^{1/2}]^{-1}, \quad (3.11)$$

откуда в частном случае $p = 0$ следуют и формулы (3.8), (3.9). Выражения (3.10) и (3.11) (с нижним знаком) справедливы и при движении в быстрой волне.

Более полное представление о характере движения можно получить из решения уравнения (3.7). Действительно, умножая его скалярно на \mathbf{p} , имеем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d p^2}{d \xi} = \beta^{-1} \mathbf{e} \mathbf{p}, \quad (3.12)$$

а умножая векторно на \mathbf{e} и учитывая, что для волны левой (правой) поляризации $d\mathbf{e}/d\xi = (\mp)k[\mathbf{n}\mathbf{e}]$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [\mathbf{e}\mathbf{p}] &= \left[\mathbf{e} \frac{d\mathbf{p}}{d\xi} \right] + \left[\frac{d\mathbf{e}}{d\xi} \mathbf{p} \right] = \\ &= \{ \pm h_0 [I^2 - (1 - \beta)(1 + p^2)]^{-1/2} - (\pm)k \} \mathbf{n} (\mathbf{e}\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Комбинируя эти два выражения, получаем интеграл движения

$$ep \sin \mu + \left[\pm \frac{h_0}{1-\beta^2} [I^2 - (1-\beta^2)(1+p^2)]^{1/2} + (\pm) \frac{kp^2}{2} \right] \beta = \mathcal{H}', \quad (3.14)$$

где μ — угол между векторами \mathbf{e} и \mathbf{p} . Кривые $\mathcal{H}' = \text{const}$ на плоскости $(p^2/2, \mu)$ можно интерпретировать как фазовые траектории. В переменных γ, μ уравнение фазовых траекторий выглядит следующим образом:

$$e \sin \mu [\beta^2(\gamma^2 - 1) - (\gamma - I)^2]^{1/2} + h_0 \beta \gamma + (\pm) \frac{k}{2} [\beta^2(\gamma^2 - 1) - (\gamma - I)^2] = \mathcal{H}. \quad (3.15)$$

Для приведения уравнения фазовых траекторий к универсальному виду введем переменную Γ , связанную с энергией соотношением

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1} [I - \beta \Gamma (I^2 - 1 + \beta^2)^{1/2}]; \quad \Gamma = \frac{I - \gamma(1 - \beta^2)}{\beta(I^2 - 1 + \beta^2)^{1/2}}. \quad (3.16)$$

Отметим, что $\Gamma = 1$ соответствует минимально возможной при данном I энергии γ_{\min} и $p = 0$. Для медленной волны Γ остается в диапазоне $-1 < \Gamma < 1$, причем $\Gamma = -1$ соответствует максимально возможная энергия ($p = 0$), а $\Gamma = 0$ — максимальный возможный импульс $p_{\max} = (1 - \beta^2)^{-1}(I^2 - 1 + \beta^2)$. При движении в быстрой волне энергия и поперечный импульс монотонно увеличиваются с ростом Γ в диапазоне $1 < \Gamma < \infty$.

В переменных Γ, μ уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\varepsilon_0 |\Gamma^2 - 1|^{1/2} \sin \mu + \delta |\Gamma - 1| + (\pm) \frac{1}{2} |\Gamma^2 - 1| = C, \quad (3.17)$$

где величина

$$\varepsilon_0 = \frac{e}{k} \left[\frac{|1 - \beta^2|}{\beta^2(I^2 - 1 + \beta^2)} \right]^{1/2} \quad (3.18)$$

пропорциональна амплитуде ускоряющего поля, k — волновое число, а параметр

$$\delta = h_0 k^{-1} (I^2 - 1 + \beta^2)^{-1/2} \quad (3.19)$$

характеризует выполнение резонансных условий. Отметим еще, что константа в правой части (3.17), определяемая начальными условиями, равна нулю, если начальный поперечный импульс равен нулю.

Семейства фазовых траекторий, построенные для различных комбинаций параметров ε_0 и δ , представлены на рис. 4. По оси абсцисс на этих рисунках отложена величина $\varepsilon_0 \sin \mu$, поэтому в процессе движения изображающая точка перемещается вдоль фазовой траектории $C = \text{const}$ так, что ее абсцисса колеблется в пределах $\pm \varepsilon_0$. Чем больше эти пределы, тем больше глубина модуляции Γ , т. е. энергии (для быстрой волны). При заданном ε_0 глубина биений максимальна при «резонансном» значении $|\delta| \geq 1$.

Таким образом, точный авторезонанс в рассмотренном выше смысле при $\beta^2 \neq 1$ невозможен. Однако при достаточно малом отклонении фазовой скорости от единицы энергия может сильно меняться в процессе биений. Наибольший интерес с этой точки зрения представляет случай $\beta > 1$, соответствующий, например, гладкому волноводу (волна в волноводе не является, строго говоря, плоской, но, например, для параксиального движения в волне типа H_{11} этим отличием можно пренебречь). Величину биений Γ можно оценить по графику рис. 5, на котором изображены значения Γ при $\sin \mu = \pm 1$ (резонансные кривые).

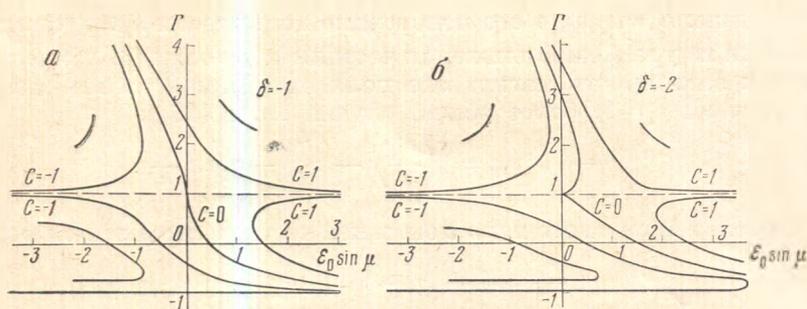
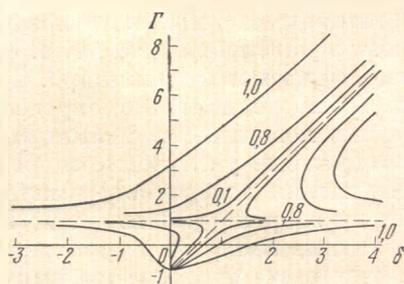


Рис. 4. Фазовые траектории в быстрой ($\Gamma > 1$) и медленной ($\Gamma < 1$) волне правой поляризации для двух значений δ . Для левой поляризации траектории получают за заменой $\delta \rightarrow -\delta$, $\mu \rightarrow -\mu$, $C \rightarrow -C$

Рис. 5. Резонансные линии ($\sin \mu = \pm 1$) для случая $C=0$ (инжекция параллельно магнитному полю) и волны правой поляризации

Кривые при $\Gamma > 1$ соответствуют быстрой волне, при $\Gamma < 1$ — медленной. Цифрами на кривых указаны соответствующие значения ϵ_0



Характер резонансных кривых, типичный для нелинейной колебательной системы, указывает еще на одну возможность достижения большой энергии. Действительно, колебания энергии на рис. 5 происходят либо между линией $\Gamma=1$ и одной из ветвей резонансной кривой, либо между двумя ветвями, что соответствует захвату нелинейной колебательной системы в режим автофазировки. В этом случае колебания происходят около некоторого равновесного значения энергии (штриховые кривые), которое можно менять, меняя параметр δ в пространстве или во времени. Такой режим аналогичен резонансному ускорению в циклических ускорителях, и некоторые варианты этого режима мы кратко рассмотрим.

В обычных ускорителях поддержание резонанса при изменении энергии достигается изменением частоты ускоряющего вч-поля (фазотрон) или величины магнитного поля (синхротрон) во времени. В случае авторезонансного ускорения бегущей волной появляется дополнительная возможность, поскольку частица может двигаться и вдоль волны: резонанс можно поддерживать, изменяя магнитное поле не во времени, а в пространстве (вдоль Oz).

Чтобы найти необходимый закон изменения магнитного поля, нужно потребовать, чтобы частица в каждый момент времени находилась в фазе с волной и получала от волны прирост энергии

$$\dot{\gamma} = x\dot{e}_x + y\dot{e}_y = e_1(x^2 + y^2)^{1/2} \cos \mu, \tag{3.20}$$

где μ — некоторый постоянный (или меняющийся по заданному закону) сдвиг фаз. Условие (3.20) недостаточно для однозначного определения магнитного поля, поэтому можно наложить дополнительное условие на форму магнитного поля или на траекторию движения частицы.

Рассмотрим, например, плоскую волну с фазовой скоростью $\beta > 1$. Потребуем, чтобы z -компонента магнитного поля изменялась вдоль траек-

тории частицы: $h_z = h_z(z)$, а его поперечные компоненты h_x, h_y были равны нулю. Тогда из уравнений движения частицы и условия (3. 20) получается следующая зависимость магнитного поля от z (при нулевых начальных условиях и $\cos \mu_s = 1$, более общий случай см. в [16]):

$$\beta^{-2} (\beta^2 - 1)^{3/2} e_1 z = \left[\left(\frac{h_z}{k} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} - \operatorname{arctg} \frac{h_z}{k}. \quad (3. 21)$$

При этом связь магнитного поля с энергией частицы выражается формулой

$$\frac{h_z}{k} = 1 + (\gamma - 1)(1 - \beta^{-2}). \quad (3. 22)$$

Таким образом, возможно авторезонансное ускорение частицы плоской волной с фазовой скоростью, большей скорости света, если магнитное поле увеличивать вдоль z пропорционально энергии частицы.

Условия авторезонансного ускорения частицы ТЕ-волной с круговой поляризацией в круглом волноводе были найдены в работе [17]. На траекторию частицы было наложено условие постоянства радиуса ее вращения в магнитном поле, т. е. рассматривалось движение частицы по поверхности кругового цилиндра. С помощью этого условия и условия резонанса (3. 20) однозначно определяются компоненты магнитного поля h_z и h_r на поверхности цилиндра. Возможны два режима ускорения. В первом режиме увеличение энергии частицы происходит в основном за счет увеличения поперечного импульса, шаг спиральной траектории при увеличении энергии уменьшается. В этом режиме требуются очень сильные магнитные поля. Во втором режиме увеличение энергии идет в основном за счет роста продольного импульса, шаг спирали растет. Магнитное поле увеличивается с энергией медленнее, но для ускорения частицы до данной энергии требуется большая длина, чем в первом режиме.

§ 4. Резонансное движение в неоднородном вч-поле. Из изложенного выше ясно, что для поддержания резонанса с плоской волной требуется фазовая скорость, равная единице, и однородное магнитное поле, величина которого должна быть согласована с частотой волны и начальными параметрами движения. Рассогласование этих параметров ведет к ограничению максимальной достижимой энергии.

С точки зрения теории ускорителей это связано с чисто «внешним» характером рассмотренного резонанса, поскольку вектор электрического поля e предполагался не зависящим от поперечных координат. Отказ от этого ограничения позволил бы, во-первых, осуществить параметрический резонанс, для которого характерно наличие области резонансных условий, а не одной точки $I = h_0/k$, как для внешнего резонанса, и, во-вторых, получить резонансное воздействие на гармониках гирочастоты, т. е. уменьшить необходимое магнитное поле.

Сама возможность резонансного воздействия основана лишь на предположении о равенстве фазовой скорости поперечной волны единице и равенстве электрической и магнитной составляющих волны, но никак не связана с однородностью поля e . Кроме свободного пространства поперечные волны с $\beta = 1$ могут распространяться в линиях передачи. Электрическое поле в них неоднородно и имеет в поперечной плоскости квазистатическую структуру, т. е. $e = -\nabla\Phi$, где Φ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$ и нулевым граничным условиям на электродах линии. Поэтому, варьируя форму электродов линии, можно получать разнообразные зависимости поля от поперечных координат.

В частном случае линии, образованной двумя бесконечными плоскостями, волна ничем не отличается от плоскополяризованной волны в свободном пространстве, и на этом случае мы специально останавливаться не будем. Рассмотрим линию мультипольного типа (рис. 6), состоящую

из $2n$ электродов, в которой поле зависит от радиальной координаты r как r^{n-1} , а потенциал $\Phi \sim r^n$.

Если $\rho = x + iy$ есть комплексный вектор поперечного смещения, то поле мультипольности n может быть описано выражением

$$e = e_0(\xi)(\rho)^{n-1}, \quad (4.1)$$

так что основное уравнение (1.5), справедливое и в данном случае, может быть переписано в виде

$$\frac{d\rho}{d\xi} + i \frac{h_0}{I} \rho = e_0(\xi)(\rho)^{n-1}; \quad (4.2)$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\rho}{I}.$$

Фактически оно является колебательным уравнением с нелинейной правой частью. Как известно [20], при определенных значениях собственной частоты возможны так называемые нелинейные резонансы, которые и будут целью нашего исследования.

Примем теперь во внимание, что применение линий передачи, как, впрочем, и волноводов, практически возможно, по-видимому, лишь для достаточно больших длин волн, скажем сантиметрового диапазона. Имеющиеся здесь мощности таковы, что амплитуда электрического поля мала по сравнению с ведущим полем. Другими словами, расчет может быть произведен в предположении малости величины $n\Phi$.

Следуя методу усреднения, будем искать решение в виде

$$\rho = \rho_{\kappa} + \rho_0 e^{-i \frac{h_0}{I} \xi}; \quad \dot{\rho} = -i h_0 \rho_0 e^{-i \frac{h_0}{I} \xi}, \quad (4.3)$$

где ρ_{κ} и ρ_0 — медленно или мало меняющиеся комплексные величины, имеющие соответственно смысл смещения центра траектории относительно оси линии и радиуса траектории в поперечной плоскости. Подставляя (4.3) в (4.2), имеем

$$\begin{aligned} \rho'_{\kappa} &= -\frac{i}{h_0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_{\kappa}^k \rho_0^{n-1-k} e^{-i \frac{h_0}{I} (n-1-k)\xi} e_0(\xi) C_{n-1}^k; \\ \rho'_0 &= \frac{i}{h_0} \sum_{l=0}^{n-1} \rho_{\kappa}^l \rho_0^{n-1-l} e^{-i \frac{h_0}{I} (n-2-l)\xi} e_0(\xi) C_{n-1}^l. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Учитывая теперь, что поле $e_0(\xi)$ представляет собой суперпозицию право- и левополяризованной волны, т. е. $e_0(\xi) = e_1 e^{-ik\xi} + e_2 e^{ik\xi}$, можно выделить в суммах (4.4) резонансные члены первого порядка. Нетрудно видеть, что, вообще говоря, резонансы возможны при $h_0/I = k/m$, где $m \ll n-1$ — целое число. Однако характер этих резонансных полос различен. В частности, можно показать, что резонанс при $m = n-1$ не ведет к увеличению радиуса траектории (и, следовательно, энергии частицы), а вызывает только медленную прецессию ее оси. Поэтому мы не будем специально останавливаться на этом случае, так же как и на случае $m = 1$, не дающем облегчения резонансных условий по сравнению с обычным авторезонансом.

При сделанных ограничениях резонанс оказывается возможным для целых m в диапазоне $1 < m \leq n-2$, т. е. в октупольной линии и линиях

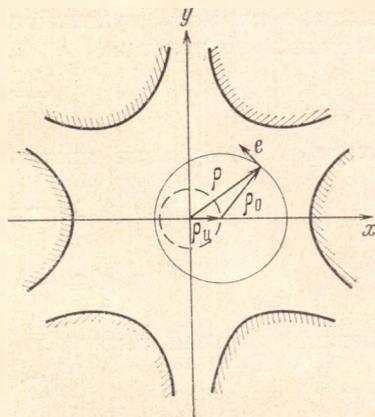


Рис. 6. Схема секступольной ($n=3$) линии передачи

высшего порядка мультипольности ($n \geq 4$). При неточном выполнении резонансного условия

$$\frac{h_0}{Ik} = \frac{1}{m} + \Delta; \quad \Delta \ll \frac{1}{m} \quad (4.5)$$

получаем следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_u' &\cong -\frac{i}{h_0} e_2 \rho_u^{n-1-m} \rho_0^m e^{-i\Delta m k \xi} C_{n-1}^m; \\ \rho_0' &\cong \frac{i}{h_0} e_2 \rho_u^{n-2-m} \rho_0^{m+1} e^{-i\Delta m k \xi} C_{n-1}^{m+1}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

имеющие первый интеграл

$$\rho_u^{n-1-m} \rho_0^{m+1} = F = \text{const} \quad (4.7)$$

и решение (при $m \neq n/2 - 1$)

$$\begin{aligned} \rho_u^{2-n/(m+1)} &= \rho_{u0}^{2-n/(m+1)} + \frac{e_2(2m+2-n)}{h_0 \Delta m k (m+1)} C_{n-1}^m F^{\frac{m}{m+1}} (e^{-i\Delta m k \xi} - 1); \\ \rho_0^{2-n/(n-1-m)} &= \rho_{00}^{2-n/(n-1-m)} + \frac{e_2(2m+2-n)}{h_0 \Delta m k (m+1)} C_{n-1}^m F^{\frac{n-2-m}{n-1-m}} (e^{-i\Delta m k \xi} - 1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Уже из существования первого интеграла (4.7) видно, что увеличение радиуса траектории сопровождается уменьшением амплитуды прецессии и наоборот. Вообще же говоря, обе эти величины испытывают биения, амплитуда которых (либо для ρ_u , либо для ρ_0) внутри резонансной полосы может обращаться в бесконечность. Основной интерес представляют условия, при которых неограниченно возрастает ρ_0 , т. е. поперечный импульс. Нетрудно видеть, что это происходит при

$$m > \frac{n}{2} - 1; \quad \frac{2(2m+2-n)}{h_0 |\Delta| m k (m+1)} |e_2 \rho_{u0}^{n-2-m} \rho_{00}^m| > 1. \quad (4.9)$$

Как и должно быть в нелинейном резонансе высокого порядка, бесконечное возрастание энергии возможно лишь при достаточно больших начальных амплитудах и в достаточно сильном поле. В частном случае $m = n - 2$, что соответствует самому слабому резонансному полю из спектра (4.5), резонансное условие и скорость набора энергии не зависят от начального смещения центра вращения. При этом

$$\frac{\rho_0}{\rho_{00}} = \left[1 + \frac{e_2 \rho_{00}^2}{\Delta h_0 k} (e^{-i\Delta(n-2)k\xi} - 1) \right]^{2-n}. \quad (4.10)$$

Интересной особенностью рассматриваемых нелинейных резонансов является конечное «время» их действия, равное по порядку величины $\xi \approx (\Delta m k)^{-1}$. Уход траектории на бесконечность и, следовательно, бесконечный рост энергии связаны с неограниченным ростом электрического поля на орбите по закону $\sim e_0 \rho^{n-1}$. Отметим в связи с этим, что произведение $e_2 \rho_0^{m+1} \rho_u^{n-2-m}$, входящее в формулу (4.6), пропорционально амплитуде резонансной составляющей электрического поля $e_{\text{рез}}$. Учитывая интеграл движения (4.7), получаем сразу, что

$$e_{\text{рез}} \sim \rho_0^{\frac{m+1}{n-1-m}}. \quad (4.11)$$

Таким образом, в практических случаях максимальная достижимая величина ρ_0 (т. е. фактически энергия) определяется максимальным полем, которое может быть реализовано в той части линии, где возможно движение частиц.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.
2. Я. И. Френкель. Электродинамика. Т. 1. Л., Изд-во АН СССР, 1934.
3. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ДАН СССР, 145, 1252 (1962).
4. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. ЖЭТФ, 44, 261 (1963).
5. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Труды IV Международной конференции по ускорителям (Дубна). Атомиздат, 1963, стр. 1030.
6. В. Я. Давыдовский. ЖЭТФ, 43, 886 (1962).
7. В. С. Воронин, А. А. Коломенский. ЖЭТФ, 47, 1528 (1964).
8. И. А. Гилинский, К. А. Рязанцев. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 7, 838 (1964).
9. В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 7, 1193 (1964); ЖЭТФ, 48, 353 (1965).
10. С. S. Roberts, S. J. Buchsbaum. Phys. Rev., 135, A381 (1964).
11. M. L. Wolley. Plasma Physics, 12, 779 (1970).
12. А. А. Воробьев, А. Н. Диденко, А. П. Ишков, А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Ю. Г. Юшков. Атомная энергия, 22, 3 (1967).
13. H. R. Jory, A. W. Trivelpiece. J. Appl. Phys., 39, 3053 (1968).
14. А. Г. Бонч-Осмоловский. ЖТФ, 35, 1757 (1965).
15. В. Б. Красовицкий. Атомная энергия, 20, 347 (1966).
16. В. С. Воронин, В. К. Кононов. ЖТФ, 40, 160 (1970).
17. А. Н. Диденко, В. К. Кононов. Атомная энергия, 30, 50 (1971).
18. И. А. Гилинский. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 9, 407 (1966).
19. В. Я. Давыдовский, Е. М. Якушев. ЖЭТФ, 52, 1068 (1967).
20. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей, М., Физматгиз, 1962.

В. В. МЕЛЬНИКОВ, В. Н. ТЕЛЕЖНИКОВ

**ТИРАТРОННЫЙ РАЗРЯДНИК МОДУЛЯТОРА КЛИСТРОНА
ЛИНЕЙНОГО УСКОРИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЛУ-50**

Описываемый разрядник изготовлен и разработан для замены шаровых разрядников в модуляторах клистронов КИУ-12А. Блок-схема модулятора приведена на рис. 1.

В качестве накопителя энергии в модуляторе используется двойная формирующая линия ДФЛ-60-2,6, заряжаемая резонансным способом от источника постоянного тока. Линия разряжается на нагрузку (клистрон) через импульсный трансформатор с коэффициентом трансформации 5 с помощью разрядника.

Модулятор имеет следующие параметры: амплитуда импульса напряжения — до 300 кВ, амплитуда импульса тока — 260 А, длительность импульса на уровне 0,9 — 2,2 мксек, длительность импульса на уровне 0,5 — 2,6 мксек, частота следования импульсов 50 гц.

Опыт эксплуатации модуляторов с искровыми разрядниками ШР-300 показывает, что наибольшее число остановок как модулятора, так и ускорителя в целом связано с неисправностью разрядника. Разрядник может непрерывно работать в течение 18—20 час, после чего стабильная его работа нарушается и требуется проведение профилактических работ.

Недостатками искрового разрядника также являются: временная нестабильность импульса, нестабильность амплитуды импульса, наличие неуправляемых пробоев, пропуски импульса, необходимость перестройки разрядника при изменении напряжения на клистроне более чем на 100 кВ, сложная схема управления и большая потребляемая ею мощность.

Из-за перечисленных причин было необходимо заменить искровые разрядники модуляторов клистронов линейного ускорителя на тиратронные, которые имеют ряд достоинств: точная управляемость, временная стабильность, небольшая управляющая мощность, возможность работы в широком диапазоне напряжений.

Тиратронный разрядник состоит из собственно коммутирующего элемента модулятора, делителя напряжения, схемы управления разрядником, клипсерного диода, системы водоохлаждения. Предусмотрено аварийное отключение разрядников при отсутствии охлаждающей воды и обрыве накала клистронов. Принципиальная схема разрядника приведена на рис. 2.

Коммутирующий элемент состоит из двух последовательно включенных импульсных водородных тиратронов типа ТГИ1-2000/35 (Л1, Л2). Тиратроны этого типа требуют водяного охлаждения (охлаждаются анодный блок и сетка). Так как аноды тиратронов находятся под высокими и к тому же различными потенциалами относительно земли, необходимы развязки по воде — водяные дроссели. Водяные дроссели вместе с сопротивлениями R14, R15 являются делителем, который обеспечивает равномерное деление напряжения на формирующей линии между тиратронами в течение времени заряда. Так как омический делитель не обеспечивает

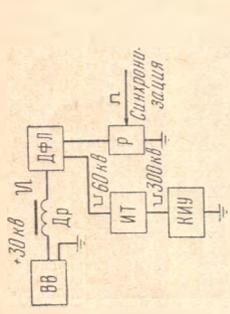


Рис. 1. Блок-схема модуля-тора клистрона

ВВ — высоковольтный выпрямитель; ДФЛ — двойная формирующая линия; Р — разрядник; ИТ — импульсный трансформатор; КИУ — клистронный импульсный усилитель; Др — дроссель

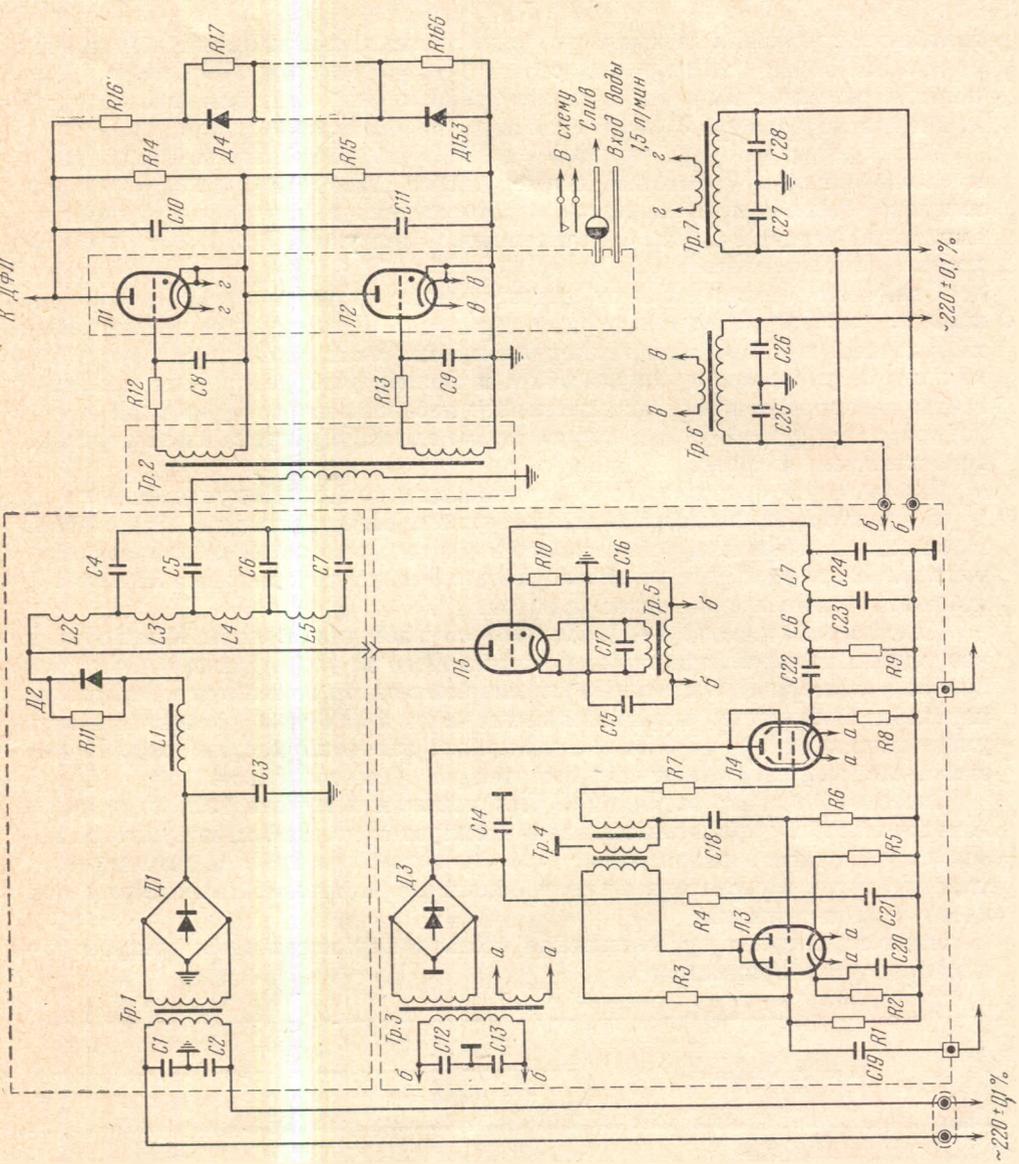


Рис. 2. Принципиальная схема тиратронного разрядника

деления напряжения во время разряда линии, напряжение на тиратронах определяется паразитными емкостями. Для устранения этого явления используется емкостный делитель напряжения С10, С11, емкость которого примерно на порядок больше величины паразитных емкостей.

Схема управления разрядником состоит из линейного подмодулятора и схемы запуска. Линейный подмодулятор обеспечивает формирование импульса для запуска тиратронов, который имеет следующие параметры: амплитуда импульса 1700 в, длительность импульса 3,6 мксек, длительность фронта импульса 0,5 мксек.

Отличием данной схемы от существующих является то, что поджигающий импульс подается не на один тиратрон Л2, а через разделительный импульсный трансформатор одновременно на сетки обоих тиратронов. Такая схема управления разрядником и малый разброс времени срабатывания тиратронов этого типа позволяет избежать перенапряжения на тиратронах, которое имеет место при запуске одного тиратрона и последующем срабатывании второго.

Схема запуска служит для формирования сеточного импульса тиратрона подмодулятора Л5 и запуска его импульсом синхронизации. Она состоит из блокинг-генератора, работающего в ждущем режиме, и катодного повторителя. Схема срабатывает от импульса с амплитудой не менее 50 в, чтобы избежать срабатывания ее от наводок.

Клипперный диод (Д4—Д153, R16) служит для защиты клистрона и разрядника от перенапряжения, возникающего на формирующей линии при пробое в клистроне. С помощью клипперного диода снимается напряжение перезаряда линии и перенапряжение при 100%-ном рассогласовании уменьшается до 10—15% от номинального значения напряжения. Кроме этого, он уменьшает величину выброса на срезе импульса.

Опытный образец разрядника был испытан в апреле 1970 г. и после конструктивной доработки введен в эксплуатацию. Работа модулятора показала надежность разрядника, стабильность временных и амплитудных характеристик модулятора с тиратронным разрядником. Разрядник очень прост в эксплуатации.

Ниже приводится сравнительная таблица характеристик тиратронного и искрового разрядников¹.

Характеристика	Разрядник	
	тиратронный	искровой
Время непрерывной работы	Не менее 200 час	Не более 20 час
Профилактика разрядника	Исключается	Через 20 час
Временная нестабильность импульса	Менее 0,005 мксек	0,1 мксек
Нестабильность амплитуды импульса	Менее 0,2%	±0,5%
Частота следования импульсов	До 300 гц	50 гц
Регулировка выходного напряжения	0—300 кВ без перестройки разрядника	0—150 кВ 150—300 кВ с перестройкой
Неуправляемые пробои	Отсутствуют	Существуют
Перенапряжение на клистроне при пробое	Менее 15%	Отсутствует
Акустический шум	Отсутствует	Существует

¹ Г. М. Иванов. Материалы I итоговой конференции по физике высоких энергий и ускорителям. Харьков, изд. ФТИ АН УССР, 1964.

Кроме приведенных данных следует отметить, что модулятор с тиратронным разрядником дает меньше наводок на физическую аппаратуру.

Из приведенной таблицы видно, что тиратронный разрядник по сравнению с искровым обладает значительными преимуществами как по эксплуатационным, так и по электрическим параметрам.

Замена искрового разрядника ШР-300 на тиратронный дает существенное улучшение работы ускорителя в целом. При этом увеличивается стабильность тока и улучшается спектр пучка электронов на выходе из-за уменьшения нестабильностей, как временных, так и амплитудных. Упрощается и ускоряется тренировка высокочастотных керамических окон. Увеличивается эффективное время работы ускорителя, так как отпадает необходимость в частых профилактических работах.

В. П. ИОНОМАРЕВ

ИЗМЕРЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МОНИТОРОВ
ВТОРИЧНОЙ ЭМИССИИ

ВВЕДЕНИЕ

В качестве первичного эталонного прибора для измерений интенсивности пучков заряженных частиц обычно используются цилиндры Фарадея [1]. Размеры и геометрия цилиндра Фарадея (ЦФ) выбираются достаточными для поглощения практически всей заряженной компоненты пучка, вызываемого первичным пучком заряженных частиц при взаимодействии его с материалом блока поглотителя ЦФ. К сожалению, во многих ядерных исследованиях (эксперименты по получению γ -квантов, исследования упругого и неупругого рассеяния электронов на ядрах и др.) применение ЦФ затруднено вследствие многократного рассеяния электронов, большого фона γ -квантов и нейтронов, полного перекрытия пучка частиц. В таких исследованиях возможно применение только «прозрачных» мониторов: ионизационных камер, мониторов индукционного типа или мониторов вторичной эмиссии (МВЭ). МВЭ основаны на явлении эмиссии вторичных электронов из тонких металлических фольг при бомбардировке их пучком заряженных частиц [2]. МВЭ очень просты по конструкции, достаточно стабильны в работе, создают пренебрежимо малый фон вторичных частиц, обладают линейностью в очень широком диапазоне токов первичных заряженных частиц, что является основным преимуществом МВЭ в сравнении с ионизационными камерами.

Для практического использования МВЭ с целью измерения интенсивности пучка заряженных частиц необходимо калибровать его по абсолютному прибору, что обычно проводится перед началом эксперимента и после его окончания. В результате калибровки определяется эффективность МВЭ (коэффициент, выход вторичной эмиссии электронов). Наблюдается отсительный выход вторичной эмиссии, т. е. истинный выход, соответствующий данной геометрии МВЭ, данной эффективности собирания электронов. При долговременной стабильности эффективности МВЭ [3] периоды между калибровками значительно увеличиваются. Для надежной и правильной работы МВЭ необходимо исследование зависимости его эффективности от параметров, влияющих на стабильность работы монитора. Такими параметрами являются: напряжение смещения между двумя наборами фольг монитора, энергия и интенсивность первичного пучка заряженных частиц, состояние поверхности фольг МВЭ и др. Исследования с алюминиевыми фольгами [2—5] показали, что эффективность МВЭ весьма чувствительна к состоянию поверхности фольг, которое сильно изменяется после пребывания фольг в атмосфере, при нагревании фольг и т. д. В работе [3] проводились измерения также для позолоченных алюминиевых фольг. Монитор такого типа является весьма стабильным: эффективность оставалась постоянной в пределах 0,3% в течение нескольких лет, если фольги не подвергались воздействию атмосферного воздуха.

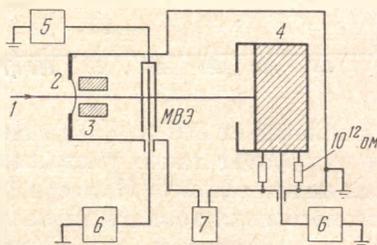
Цель настоящей работы — измерение коэффициента вторичной эмиссии для различных материалов, исследование эффективности мониторов в зависимости от факторов, влияющих на стабильность работы МВЭ, и накопление необходимого опыта работы по измерению интенсивности пучка электронов с помощью МВЭ.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Схема установки показана на рис. 1. Пучок электронов 1 линейного ускорителя через входное окно из алюминиевой фольги 2 толщиной 200 мкм входит в вакуумную камеру, в которой располагаются монитор вторичной эмиссии и цилиндр Фарадея. МВЭ состоит из двух алюминиевых коллекторных фольг и одной эмиттерной фольги. Измерения проводились для трех эмиттерных фольг из различных материалов: алюминия (толщина фольги 10 мкм), кобальта (12 мкм) и железа (фольга толщиной 20 мкм из нержавеющей стали). Диаметр фольг 40 мм, расстояние между соседними фольгами 4 мм. Фольги монитора изолированы друг от друга и от корпуса вакуум-

Рис. 1. Схема установки

1 — пучок электронов; 2 — входное окно; 3 — коллиматор; 4 — цилиндр Фарадея; 5 — источник смещения; 6 — интеграторы; 7 — вакуумный насос



ной камеры фторопластовыми изоляторами. Связь коллекторной фольги с батареей питания и эмиттерных фольг с измерительной схемой осуществляется через вакуумные фторопластовые уплотнения.

Ток, обусловленный уходящими из эмиттерной фольги вторичными электронами, измерялся интегратором тока [6]. Уход нуля интегратора за 1 час работы меньше 0,02% с автоматической компенсацией ухода нуля каждые 30 сек. Стабильность чувствительности прибора составляет 0,1%. Контрольные измерения показали, что в диапазоне от 10^{-6} до 10^{-10} а точность измерения тока пучка электронов с помощью интегратора составляет 0,5%.

Для абсолютных измерений интенсивности первичного пучка электронов применялся цилиндр Фарадея. Эффективность ЦФ для электронов с энергией 7,5 Мэв определялась экспериментальным путем по так называемому нуль-методу [7]. Проведенные измерения показали, что эффективность ЦФ составляет $(97,1 \pm 0,5)\%$. Это значение эффективности ЦФ учитывалось при определении коэффициента вторичной эмиссии МВЭ.

Давление в вакуумной камере поддерживалось около 10^{-4} тор. В этом случае утечки за счет ионизации остаточного газа меньше 0,1% тока вторичных электронов.

Эффективность МВЭ определялась как отношение токов, измеряемых интеграторами тока МВЭ и ЦФ. Измерения эффективности МВЭ проводились таким образом, что на одно и то же число зарядов известной дозирующей емкости интегратора тока ЦФ считалось число зарядов также известной емкости интегратора тока МВЭ. При соотношении дозирующих емкостей интеграторов тока МВЭ и ЦФ 1 : 100 в результате измерений можно было сразу получить эффективность вторичной эмиссии в относительных единицах, ток пучка и ток вторичных электронов.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

На рис. 2 показана зависимость эффективности МВЭ с различными эмиттерами от напряжения смещения между коллектором и эмиттером при энергии первичных электронов $7,5 \text{ Мэв}$. Из рисунка ясно видно, что эффективность вторичной эмиссии (k) резко возрастает по мере увеличения напряжения смещения примерно до $20\text{--}30 \text{ в}$, достигая максимального значения. Однако при дальнейшем увеличении напряжения эффективность МВЭ несколько уменьшается (снижение эффективности на $1,1\%$

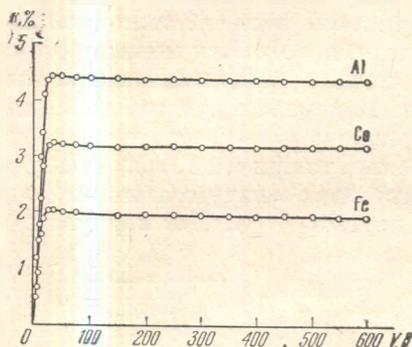


Рис. 2. Зависимость эффективности вторичной эмиссии для Al, Co и Fe от напряжения смещения между коллектором и эмиттером МВЭ

на 100 в в области от 200 до 400 в). Некоторые авторы считали, что в случае алюминиевых фольг такое уменьшение эффективности МВЭ обусловлено некоторым видом эффекта Малтера [8] (эмиссия электронов под влиянием электрического поля тонкого диэлектрического слоя Al_2O_3). Но исследования МВЭ с золотыми и алюминиевыми позолоченными фольгами [3] обнаружили тот же эффект. По-видимому, эффект Малтера в данном случае неприменим для объяснения этого явления. До сих пор не найдено удовлетворительного объяснения этого уменьшения эффективности при высоких напряжениях смещения.

В области плато выбор рабочего напряжения не критичен. Дальнейшие измерения проводились при рабочем напряжении 250 в . Были проведены исследования кратковременной стабильности эффективности МВЭ. Эффективность заметно уменьшается в течение первых часов работы.

Изменение энергии первичных электронов от $7,5$ до 10 Мэв практически не приводит к изменению эффективности МВЭ, что согласуется с данными работы [9].

В области выше 200 в эффективность вторичной эмиссии на одну фольгу составляет $(4,35 \pm 0,5)$, $(3,14 \pm 0,5)$ и $(1,92 \pm 0,7)\%$ для Al, Co и Fe соответственно. Сравнение данных для алюминия с теоретическими расчетами, нормированными с экспериментальным значением эффективности вторичной эмиссии при 2 Мэв [4], показывает вполне удовлетворительное согласие. Теоретические оценки выхода вторичных электронов при энергии первичных электронов 7 Мэв дают значение $4,48\%$ на одну фольгу.

Проведенные исследования показывают, что МВЭ с эмиттером из алюминия обладает большей эффективностью, но он более чувствителен к изменению состояния поверхности фольги. Это приводит к большей нестабильности эффективности МВЭ во времени.

В заключение автор выражает благодарность Л. Е. Лазаревой за постановку работы и В. И. Филатову, выполнившему работу по применению нуля-метода для измерения эффективности ЦФ. Автор признателен сотрудникам лаборатории Радиотехнического института АН СССР и лично П. А. Маркину, обеспечившим необходимые условия при проведении эксперимента.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *K. L. Brown, G. W. Tautfest.* Rev. Scient. Instrum., **27**, 696 (1956).
2. *G. W. Tautfest, H. R. Fechtner.* Rev. Scient. Instrum., **26**, 229 (1955).
3. *D. B. Isabelle, R. H. Roy.* Nucl. Instrum. and Methods, **26**, 351 (1964).
4. *V. J. Vanhuysse, R. E. Van de Vijver.* Nucl. Instrum. and Methods, **15**, 63 (1962).
5. *B. Planskoy.* Nucl. Instrum. and Methods, **24**, 172 (1963).
6. *G. M. Gurevich, B. N. Ponomarev, G. V. Solodukhov,* Proc. Sympos. on Beam Intensity Measurement. Daresbury, 1968, p. 238.
7. *J. F. Haque, R. E. Jennings, R. E. Rand.* Nucl. Instrum. and Methods, **24**, 456 (1963).
8. *L. Malter.* Phys. Rev., **50**, 48 (1936).
9. *L. J. Karzmark* Rev. Scient. Instrum., **35**, 1646 (1964).

Л. З. ДЖИЛАВЯН, В. А. ОБОЗНЫЙ

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАНТЫ
АХРОМАТИЧЕСКИХ ПОВОРОТНО-АНАЛИЗИРУЮЩИХ СИСТЕМ

В выведенном пучке заряженных частиц, полученных на ускорителе, много вторичных частиц (фон) и велик разброс по энергии. Следовательно, надо отклонить частицы от первоначального направления, чтобы убрать фон. Кроме того, нужно создать достаточную линейную дисперсию, чтобы с учетом эмиттанса пучка ускорителя и требуемого энергетического разрешения произвести анализ по энергии с помощью щели. При достаточно высоких энергиях частиц этого можно достигнуть с помощью одного или нескольких магнитов. Для получения хорошего разрешения по энергии требуется, чтобы в месте расположения щели пучок был сфокусирован. В крайнем случае щель должна быть расположена достаточно близко от места, где фокусируется пучок.

Однако наличие дисперсии приводит к тому, что линейные размеры пучка, прошедшего анализ, растут. Это обычно приводит к затруднению в дальнейшей транспортировке пучка и ухудшает разрешение, которое может быть получено в физических экспериментах. Вместе с тем проведение анализа по энергии приводит к появлению добавочного фона вторичных частиц, образующихся в материале щели. Фоновые частицы, содержащиеся в пучке до первого магнита, также образуют вторичный фон в материале пучкопровода. Чтобы избавиться от этих недостатков, можно ввести еще один или несколько отклоняющих магнитов, так чтобы получить нулевую дисперсию в конце системы (ахроматизм). Кроме того, магнит уведет пучок от фона, создаваемого на анализирующей щели.

Таким образом, минимально возможное число магнитов, необходимое для осуществления ахроматической системы транспортировки пучка, равно двум. Эти магниты могут поворачивать пучок либо в одну и ту же сторону, либо в противоположные стороны. Весьма частым на практике для первого случая является поворот на угол $(\alpha_1 + \alpha_2) = 90^\circ$ (здесь α_1 и α_2 — углы поворота пучка в первом и втором магнитах соответственно), что связано с достаточно распространенной геометрией экспериментальных залов.

Мы будем рассматривать системы, обладающие зеркальной симметрией [1]. Для симметричных систем расчеты значительно упрощаются, и создается впечатление, что для них на элементы системы накладываются сравнимые и более выгодные требования по апертуре, чем для несимметричных систем. Кроме этого, из-за желательности унифицирования оборудования совместно с магнитами используются только однотипные квадрупольные линзы. При этом требуется наименьшее число оптических элементов, при котором удовлетворяются следующие требования на плоскости симметрии системы: 1) параллельный пучок в горизонтальной (xz) и вертикальной (yz) плоскостях на входе в систему фокусируется в точку ($M_{11z} = 0$; $M_{11y} = 0$); 2) угловая дисперсия пучка равна нулю ($M_{23x} = 0$).

Выполнение этих условий обеспечит на выходе системы равенство нулю линейной и угловой дисперсии ($C_{13x}=0$; $C_{23x}=0$), и параллельный пучок на входе в систему преобразуется в параллельный же пучок на выходе из нее ($C_{21x}=0$; $C_{21y}=0$) [1].

Указанным выше требованиям могут удовлетворить несколько вариантов систем, которые рассмотрены в данной работе (рис. 1 и таблица). В вариантах 5—8 центральная (полевая) линза, обеспечивающая ахроматизм системы, заменена парой линз, симметрично разнесенных от плоскости симметрии системы. Это видоизменение связано с желательностью размещения анализирующей щели за пределами апертуры линзы.

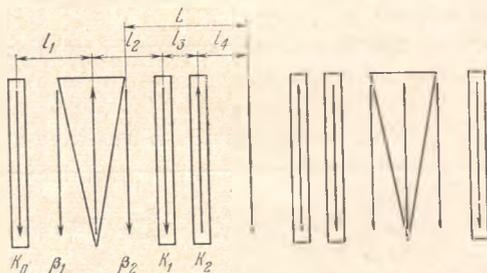


Рис. 1. Схематическая расстановка элементов в рассмотренных системах (пучок идет слева направо)

Во всех системах $l_1=l_2=0,8427$ м

Браун предложил вариант 1, подробное матричное рассмотрение которого приведено в работе [2]. Вариант 8 рассмотрен в работе [3].

Добавочными требованиями для выбора элементов системы являются: необходимость получения энергетического разрешения $\sim 10^{-3}$; ограничение в общих размерах системы, связанное с геометрией экспериментальных залов (полная протяженность системы не более 10 м); возможность пропускать пучок с дисперсией $\sim 10^{-2}$; способность пропускать пучки с достаточно большими эмиттансами ($\sim 10^{-3}$ м·рад).

В соответствии с этими требованиями конкретное рассмотрение всех систем проводилось для магнитов с радиусом кривизны центральной траектории $\rho=1$ м, апертурой $2a_x=8 \cdot 10^{-2}$ м, $2a_y=5 \cdot 10^{-2}$ м и для линз с эффективной длиной $L_{\phi}=0,24$ м и апертурой $2a_x=2a_y=5 \cdot 10^{-2}$ м.

При оптимизации задавались изменения расстояния между элементами, градиенты линз (параметр K) [2] или углы скоса полюсов магнитов для того, чтобы удовлетворить требования 1 и 2. Затем находились аксептансы системы в плоскостях (xx') и (yy') (их форма и площади); линейная дисперсия системы M_{13x} ; соотношение M_{12x}/M_{13x} , определяющее наилучшее энергетическое разрешение для пучка с заданной непараллельностью; матричные коэффициенты C_{12x} и C_{12y} , являющиеся аналогом длины в представлении системы как свободного пространства [4].

Все расчеты выполнены в линейном приближении, но при проверке ахроматичности системы в целом учитываются хроматические aberrации квадрупольных линз.

Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-4 при помощи универсальной программы «Фокус», написанной Миллером (ИТЭФ) для расчета пучков вторичных частиц [5]. Попытка применить некоторые другие фокусирующие программы, в которых используются стандартные минимизирующие программы, не дала желаемых результатов, так как подобные программы долго работают, требуют хорошего начального приближения и зачастую останавливаются на локальных минимумах. Для проверки результатов машинного счета использовалась программа «Транспорт» [6].

Для расчета по программе «Фокус» системы разбивались на два объекта. Источник помещался на бесконечности, и его изображение находилось на щели (конец первого объектива). Наличие в программе парамет-

ров-дублеров позволяло при изменении расстояний и градиентов в первом объективе делать второй объектив симметричным первому. После фокусировки в первом объективе проводилась оптимизация угловой дисперсии на щели.

Во всех оптимизированных системах параллельный пучок на входе сфокусирован в обеих плоскостях на оси симметрии систем с точностью не хуже 10^{-6} , и системы ахроматичны, $M_{23z} < 10^{-6}$.

Для вычисления аксептанса систем использовалась несколько измененная программа «Профиль», которая входит в состав «Фокуса». Программа, названная «Ваксис», позволяет вычерчивать на АЦПУ многоугольники аксептанса [7]. Процедура вычисления аксептанса аналогична изложенной в работе [8].

Результаты расчета систем и наиболее характерные их свойства приведены в таблице.

Результаты расчета и наиболее характерные свойства систем

Номер варианта	Число линз	$K_0, 1/м$	$\beta_{11}, град$	$\beta_{21}, град$	$K_1, 1/м$	$K_2, 1/м$	$l_3, м$	$l_4, м$	$l_1, м$
1	1	0	0	26,5	0	1,919	1,4906	0	2,0006
2	1	0	19,2	0	0	1,860	1,5651	0	2,0751
3	3	0	0	0	1,942	2,326	1,0861	0	1,5961
4	3	1,175	0	0	0	1,967	1,3128	0	1,8228
5	2	0	0	37,1	0	1,923	0,4000	0,8549	1,7049
6	2	0	25,4	0	0	1,844	0,4000	0,7686	1,6186
7	4	0	0	0	2,465	2,393	0,4000	0,6250	1,4750
8	4	1,305	0	0	0	1,845	0,4000	0,6204	1,4704

Продолжение

Номер варианта	$V_x \cdot 10^3, м \cdot рад$	$V_y \cdot 10^4, м \cdot рад$	$V_x V_y \cdot 10^6, м^2 \cdot рад^2$	$M_{13x}, м$	$\frac{M_{12x}}{M_{13x}}$	$-C_{12x}, м$	$C_{12y}, м$
1	1,394	0,836	1,164	1,950	$\sqrt{2}$	0,828	6,080
2	1,630	0,468	0,760	1,718	1,235	0,724	12,727
3	1,366	0,614	0,836	2,000	$\sqrt{2}$	0,828	1,607
4	1,178	1,166	0,196	1,540	1,096	1,577	14,860
5	1,450	1,008	1,464	1,084	$\sqrt{2}$	0,828	6,847
6	1,600	0,396	0,636	0,895	1,181	0,692	16,431
7	1,596	0,574	0,916	1,268	$\sqrt{2}$	0,828	1,895
8	2,088	0,112	0,236	0,895	1,041	1,509	20,656

Горизонтальный и вертикальный аксептансы систем приведены на рис. 2.

Анализ свойств систем показывает следующие закономерности:

1) системы с краевой фокусировкой на выходе перекрестка магнита (углы скоса полюсов $\beta_1=0, \beta_2 \neq 0$) или с линзой, расположенной после первого магнита ($K_0=0, K_1 \neq 0$), т. е. системы 1, 3, 5, 7 по сравнению с системами с $\beta_1 \neq 0, \beta_2=0$ или с $K_0 \neq 0, K_1=0$, т. е. системами 2, 4, 6, 8 соответственно, дают больший полный принимаемый фазовый объем $V_x V_y$ в четырехмерном пространстве $(xx'yy')$ и меньшую величину C_{12y} , что означает их предпочтительность;

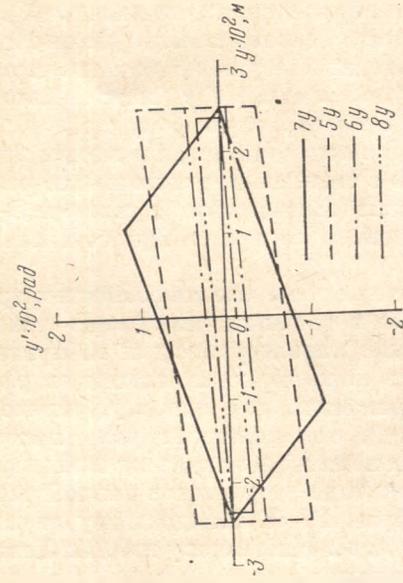
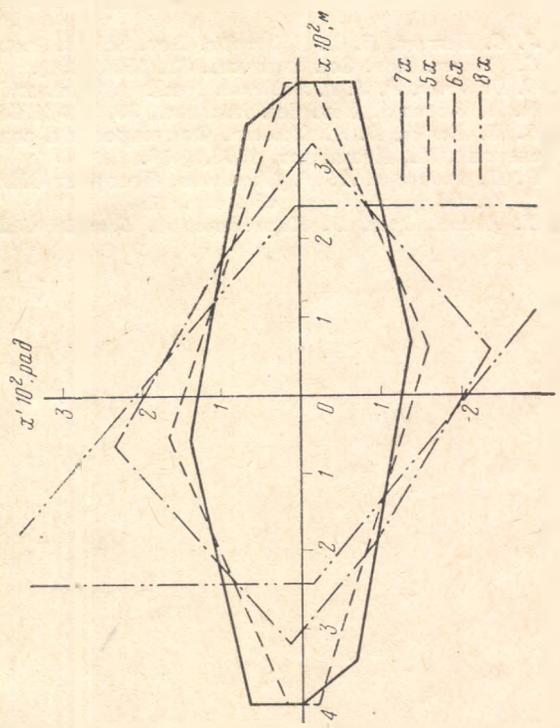
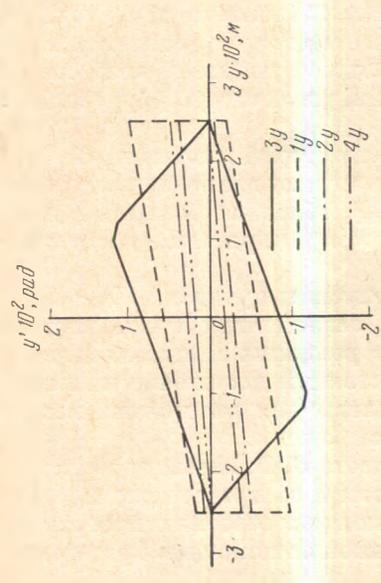
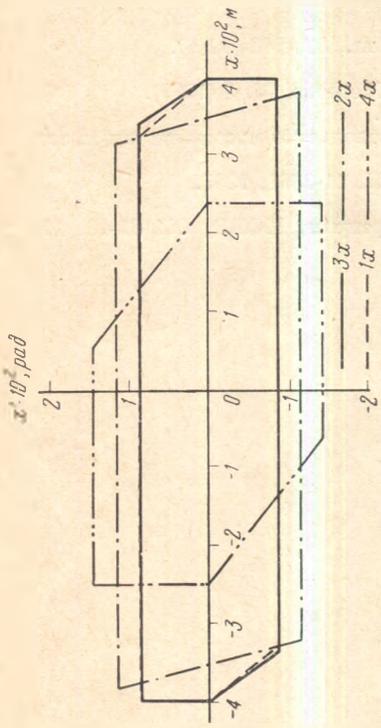


Рис. 2. Многоугольник абертанса различных систем

x — горизонтальный абертанс; y — вертикальный абертанс

2) системы со скосом (системы 1, 2, 5, 6) по сравнению с системами, в которых скосы заменены квадрупольными линзами (соответственно системы 3, 4, 7, 8) обладают большими $V_x V_y$. Это объясняется тем, что квадрупольная линза не может быть размещена на месте скоса магнита. Другие характеристики достаточно близки. Приблизить эти две группы систем друг к другу по величине $V_x V_y$ можно было бы, увеличив апертуру линзы, заменяющей скос (краевую фокусировку);

3) системы с полевой линзой в плоскости симметрии (системы 1, 2, 3, 4) по сравнению с системами, в которых ее роль играют две разнесенные симметрично линзы (соответственно системы 5—8), обладают большей линейной дисперсией, в то время как остальные характеристики достаточно близки;

4) все системы обладают способностью пропускать пучки с $\Delta p/p \sim 10^{-2}$.

Выбранные в расчетах положения линз, заменяющих скосы, близки к оптимальным, характерным для габаритов реальных магнитов и линз, и зависимость характеристик систем от расстояний достаточно плавная. Эти же соображения, по-видимому, справедливы для расстояния между центрами линз, исполняющих роль полевой линзы.

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Миллеру за плодотворное обсуждение результатов данной работы и за предоставление программы «Фокус», Р. Л. Кондратьеву за помощь в освоении программы «Транспорт», А. А. Нистратову и Э. И. Левкиной за помощь в проведении некоторых расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Herrera, E. E. Blamptis. Rev. Scient. Instrum., **37**, 183 (1966).
2. S. Penner. Rev. Sci. Instrum., **32**, 150 (1961).
3. C. De Vries, P. J. I. Bruisma. Nucl. Instrum. and Methods, **74**, 5 (1969).
4. D. A. Swenson. Rev. Sci. Instrum., **35**, 608 (1964).
5. В. И. Котов, В. В. Миллер. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий. М., Атомиздат, 1969, § 36.
6. Р. Н. Федорова, А. И. Широкова. Препринт ОИЯИ, 11-3361, 1967.
7. В. А. Обозный. Наст. сб., стр. 129.
8. И. Александров, В. Карташев, А. Самойлов. Препринт ИФВЭ, ОП 67-18, 1967.

Л. З. ДЖИЛАВЯН, В. А. ОБОЗНЫЙ

ВАРИАНТЫ РАЗВОДКИ ПУЧКОВ ОТ ЛИНЕЙНОГО УСКОРИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ ФИАН

Решение проблемы транспортировки пучков от ускорителя является комплексной задачей, в которой необходим учет различных требований. Эти требования являются зачастую противоречивыми, так что задача приобретает характер поиска оптимума. Учитывая достаточную дороговизну оборудования, необходимого для транспортировки пучков, следует совместно составлять как проект ускорителя, так и системы транспортировки пучков от него, исходя из программы физических исследований на ускорителе. Конечно, развитие исследований может поставить новые задачи, которые вначале было трудно или даже невозможно предусмотреть. Однако это не устраняет необходимости такого объединенного проекта, но приводит к тому, что в таком проекте должен быть разумный запас возможностей. Критериями оптимальности этого запаса являются экономические и кадровые возможности коллектива, работающего на ускорителе, а также учет быстроты процесса морального старения ускорителей, что следует из опыта их эксплуатации в лабораториях мира.

С этой точки зрения проблемы транспортировки пучков от линейного ускорителя электронов лаборатории фотоядерных реакций ФИАН (см. параметры) представляют собой более узкую задачу.

Основные характеристики линейного ускорителя электронов:

Энергия электронов	$E=50 \text{ Мэв}$
Ширина спектра	$\Delta E/E=\pm 2\%$
Средний ток	$I_{\text{ср}}=10 \text{ мкА}$
Длительность импульса	$\tau=1,4 \text{ мксек}$
Частота повторения	$\nu=50 \text{ гц}$
Диаметр пучка	$d\sim 10 \text{ мм}$
Расходимость пучка	$\Theta\sim 10^{-4} \text{ рад}$

Проводящиеся исследования на этом ускорителе:

- 1) эксперименты на тормозном γ -пучке от непроанализированного по энергии электронного пучка;
- 2) эксперименты на тормозном γ -пучке от проанализированного по энергии электронного пучка (требуемое разрешение $\sim 10^{-3}$);
- 3) эксперименты по рассеянию электронов на ядрах (требуемое энергетическое разрешение лучше 10^{-3});
- 4) эксперименты на квазимонохроматических γ -квантах от аннигиляции позитронов на лету (требуемое энергетическое разрешение 10^{-2} — 10^{-3}).

Для первых трех пунктов требуемый аксептанс систем транспортировки задается эмиттансом электронного пучка ускорителя ($\sim 10^{-6} \text{ м}\cdot\text{рад}$). Для работы с позитронами требуемый аксептанс системы анализа $\sim 10^{-4} \text{ м}\cdot\text{рад}$.

При рассмотрении вариантов разводки и формирования пучков от ускорителя, удовлетворяющих требованиям указанных выше исследований, мы были вынуждены ограничиться возможностями, определяемыми геометрией экспериментальных залов, наличием некоторого количества отклоняющих магнитов, квадрупольных линз и питания к ним.

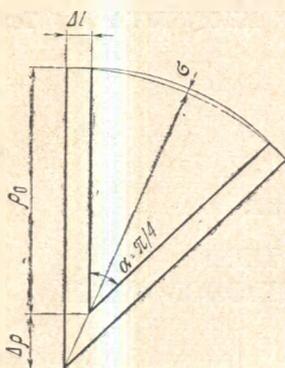


Рис. 1. Схематическое изображение магнита при учете рассеянного поля

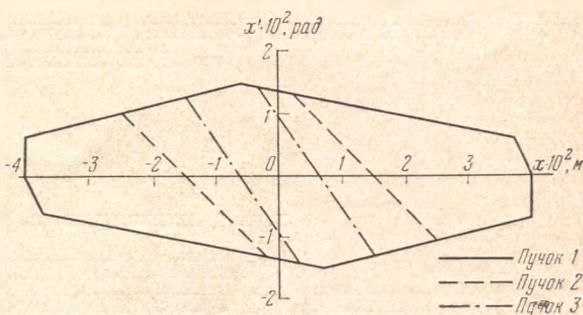


Рис. 2. Горизонтальные аксептансы рассчитанных систем

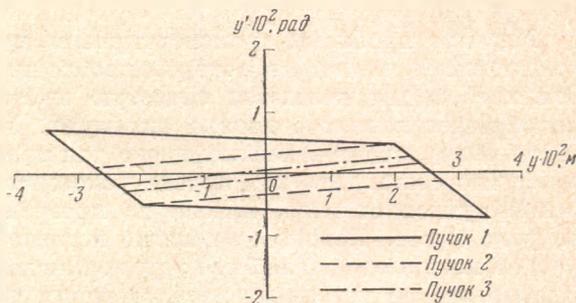


Рис. 3. Вертикальные аксептансы рассчитанных систем

Имеются магниты типа СП-63А [1]. Угол поворота $\alpha=45^\circ$; углы скоса полюсов $\beta_1=\beta_2=0$; радиус центральной дуги дорожки $\rho_0=1$ м; полная ширина дорожки $2A_x=16 \cdot 10^{-2}$ м; ширина дорожки с однородным полем $2a_x=8 \cdot 10^{-2}$ м; высота зазора между полюсами $2a_y=5 \cdot 10^{-2}$ м.

Имеются квадрупольные линзы типа МЛ-26 (разработчик тот же). Длина полюсов $20 \cdot 10^{-2}$ м; эффективная длина линзы (согласно нашим измерениям) $L_{\text{эф}}=0,24$ м; апертура линзы $2a_x=2a_y=5 \cdot 10^{-2}$ м.

Основой предлагаемых вариантов разводки пучков является ахроматическая поворотнo-анализирующая система с полным углом поворота 90° , обладающая зеркальной симметрией. Здесь мы ее будем обозначать как систему 1. Выбор данной системы обосновывается в работе [2] (вариант 7).

Все расчеты произведены в ВЦ ФИАН с использованием библиотеки программ для расчета электронно-оптических систем [3].

В отличие от работы [2] здесь учитывались рассеянные краевые поля реальных магнитов. Учет производился следующим образом (рис. 1). Положение эффективной границы поля находилось теоретически (согласно работе [4]) и экспериментально из измерений, сделанных в нашей лаборатории Р. Л. Кондратьевым, и расстояние от эффективной границы поля до границы полюса оказалось равным $\Delta l=0,68 \cdot 2a_y$. Выбиралось такое представление эффективного магнита, при котором угол поворота (α) оставался равным 45° . Отсюда $\rho=\rho_0+\Delta\rho=\rho_0+\Delta l/\text{tg}(\pi/8)$. При этом $\sigma=\Delta l/\sin(\pi/8)=0,68 \cdot 2a_y/\sin(\pi/8)$, т. е. $\sigma=6,75 \cdot 10^{-3}$ м. Сместив магнит на $\sigma/2$, получаем уменьшение полезной дорожки только на $\sigma/2$.

В соответствии с этим для линз были найдены параметры K [5].

Кроме этой системы были рассмотрены еще системы 2 и 3, имеющие в качестве первой части половину указанной выше системы 1, включая щель, так что анализ по энергии проводился при одинаковых условиях во всех системах.

Для системы 2, обеспечивающей ахроматический параллельный перенос пучка с анализом по энергии, магнит 2 (см. ниже, рис. 5) выключается

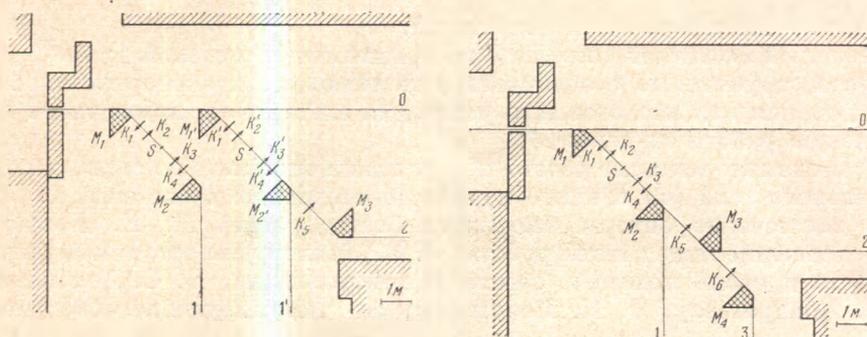


Рис. 4. Схематическое изображение варианта а разводки пучков
S — щель, M — магниты, K — параметры квадрупольных линз

Рис. 5. Схематическое изображение варианта б разводки пучков
Обозначения те же, что на рис. 4

и добавлена одна линза перед магнитом 3. Для системы 3, обеспечивающей ахроматический поворот пучка на 90° с анализом по энергии, магниты 2 и 3 выключаются и добавлена еще одна линза перед магнитом 4.

Характеристики этих систем, включая горизонтальный V_x и вертикальный V_y аксептансы их, приведены в таблице и на рис. 2 и 3.

Результаты расчета и некоторые характеристики рассматриваемых систем

Система	M_1	M_2	M_3	M_4	$K_{1,}$ м ⁻²	$K_{2,}$ м ⁻²	$K_{3,}$ м ⁻²	$K_{4,}$ м ⁻²	$K_{5,}$ м ⁻²	$K_{6,}$ м ⁻²	$V_x^{(1)}$, м · рад	$V_y^{(1)}$, м · рад	$V_x^{(2)}$, м · рад
1	+	+	0	0	-4,59	+5,26	+5,26	-4,59	0	0	16,4	6,2	103
2	+	0	-	0	-4,59	+5,26	+5,26	-4,85	10,22	0	6,75	2,97	20
3	+	0	0	+	-4,59	+5,26	+5,26	-4,93	10,1	10,1	3,35	0,23	0,75

Примечание. Знак плюс обозначает, что магнит поворачивает пучок вправо, знак минус — влево, ноль — магнит выключен.

Из геометрии залов и результатов расчетов следует, что возможны следующие варианты разводки пучков на ЛУЭ ФИАН: а) две одностипные системы поворота на 90° (системы 1 и 1') с возможным последующим добавлением к системе 1' системы параллельного переноса (системы 2) (рис. 4); б) объединенная система (см. рис. 5).

Сопоставление этих двух вариантов разводки показывает следующие преимущества варианта б перед вариантом а:

1) один импульсный коллиматор (щель), сложный сам по себе и из-за необходимости мониторов тока и положения пучка, сцинтилляционного экрана и т. д.;

2) однократная организация защиты области щели, дающей основной фон для большинства экспериментов;

3) однократная настройка и выставка наиболее ответственной части всех систем, обеспечивающей выполнение наиболее жесткого требования — получения достаточно высокого энергетического разрешения;

4) наиболее экономное использование магнитов: с четырьмя магнитами три пучка с одинаково высоким разрешением.

Однако система имеет и недостатки:

- 1) малый аксептанс системы 3 по сравнению с системой 1;
- 2) конструктивные особенности уже имеющегося экспериментального оборудования для исследования рассеяния электронов, приводящие к затруднению работы на пучке 3;
- 3) несколько меньшее расстояние от конца системы 3 до стены экспериментального зала (по течению пучка) по сравнению с системой 1.

В заключение авторы выражают благодарность Л. Е. Лазаревой за предложение темы данной работы, В. В. Миллеру за постоянный интерес к работе и очень полезные советы и консультации, Б. С. Долбилкину, Р. Л. Кондратьеву, В. Н. Пономареву за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электрофизическая аппаратура промышленного изготовления. М., Госатомиздат, 1963.
2. Л. З. Джилавян, В. А. Обозный. Препринт ФИАН, № 130, 1970; наст. сб., стр. 120.
3. В. А. Обозный. Наст. сб., стр. 129.
4. Н. А. Enge. Rev. Scient. Instrum., 35, 278 (1964).
5. В. И. Котов, В. В. Миллер. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий. М., Атомиздат, 1969.

В. А. ОБОЗНЫЙ

БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Наличие на ЭВМ библиотеки программ для расчета электронно-оптических систем оказывает огромную помощь при настройке этих систем. Обычную процедуру сооружения какой-либо системы транспортировки или анализа пучка заряженных частиц можно разделить на несколько этапов:

- 1) выбор системы и предварительная расстановка элементов, исходя из геометрии залов, наличия электронно-оптических элементов и физических требований;
- 2) расчет магнитных характеристик элементов и их расстановка в соответствии с желаемыми характеристиками пучка;
- 3) изготовление и измерения реальных магнитных характеристик элементов системы и их расстановка согласно предварительному расчету оптическими методами;
- 4) корректировка расчета при учете произведенной расстановки и реальных магнитных характеристик элементов;
- 5) проверка характеристик системы пучком заряженных частиц или с помощью токнесущей нити;
- 6) окончательная корректировка расчета;
- 7) экспериментальное исследование реальных свойств полученной системы.

Таким образом, в процессе создания систем приходится неоднократно обращаться к расчетам. Возможность производить их достаточно оперативно должна значительно сократить время создания системы.

В основу библиотеки положена универсальная программа «Фокус» [1] для расчета пучков вторичных частиц. Программа дополнена подпрограммой вычисления аксептанса систем («Ваксис») и подпрограммой построения многоугольников аксептанса на АЦПУ. Для проверки результатов машинного счета в библиотеку включена программа «Транспорт» [2].

Все программы записаны на магнитной ленте и вызываются с помощью специаль-

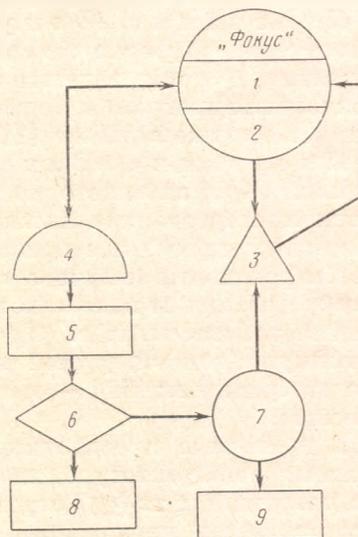


Рис. 1. Блок-схема программы «Ваксис»

1 — счет матриц; 2 — выход; 3 — блок формирования условий; 4 — блок вычисления $x'_0 \max$, $x'_0 \min$; 5 — блок печати x'_0 , $x'_0 \max$, $x'_0 \min$; 6 — печать $x'_0 \max - x'_0 \min$; 7 — блок формирования по y ; 8 — распечатка многоугольника аксептанса; 9 — печать V_x , V_y , $V_x V_y$

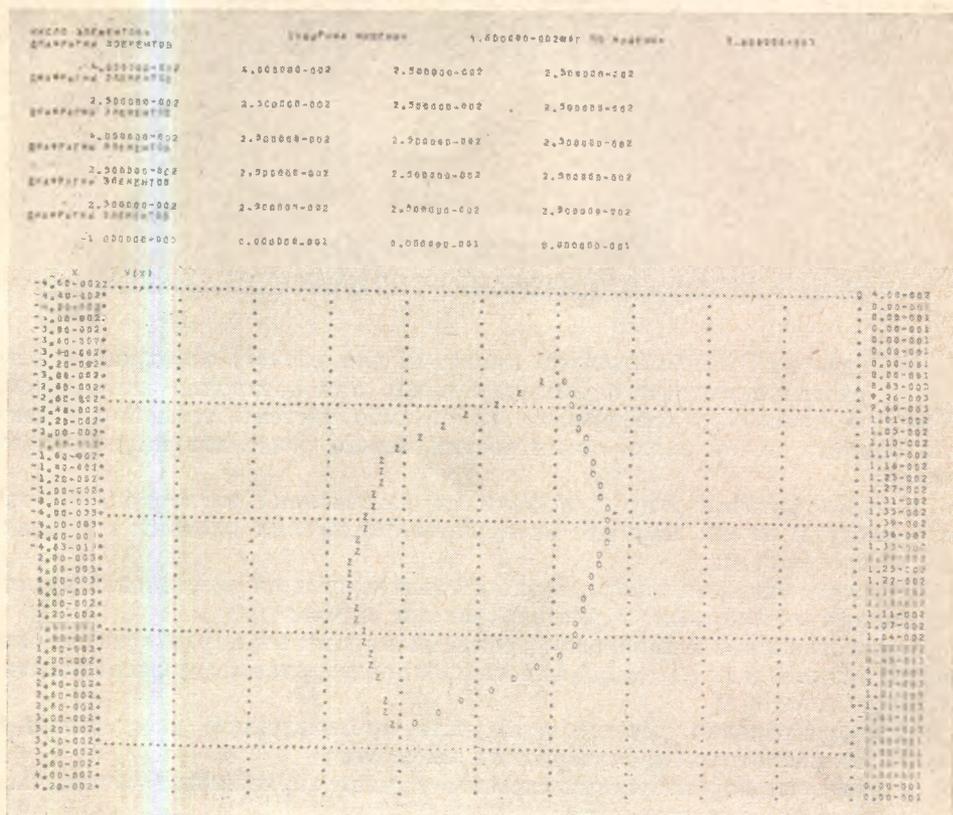


Рис. 2. Многоугольник аксептанса системы в координатах xx' для ахроматической системы [4] (вариант 7х)

ных карт, за которыми следует вводить информацию, необходимую для работы той или иной программы.

Программа «Фокус» работает с ИС-2 «Рупор». Информация в восьмеричной форме задается в ячейках начиная с 5405. Информация в десятичной форме задается в ячейках начиная с 4475. Подробнее с возможностями программы можно ознакомиться в полной инструкции к программе, а также в работе [1].

Программа «Ваксис» является несколько измененной программой «Профиль», которая входит в состав «Фокуса». Процедура вычисления многоугольника аксептанса аналогична описанной в работе [3]. Блок-схема программы приведена на рис. 1.

Коэффициенты матриц в «Фокусе» представляют собой коэффициенты преобразования от пачала координат до места изображения, создаваемого данным элементом, т. е. $|T_i| = |B_i| |M_i|$, где $|B_i|$ — матрица свободного промежутка длиной, равной расстоянию от конца i -го элемента до положения изображения; $|M_i|$ — матрица преобразования до выхода из данного элемента.

В программе производится пересчет $|M_i| = |B_i|^{-1} |T_i|$, и затем диафрагмы, равные апертуре данного элемента, переносятся на вход в систему, и в координатах xx' (yy') строится многоугольник аксептанса. После этого рассчитывается принимаемый фазовый объем $V_x = \sum (x'_{0\max} - x'_{0\min}) \Delta x$ и аналогично V_y , а также $V_x V_y$.

Задаваемая информация (в десятичном виде) помещается в ячейках начиная с 3155:

3155 — расстояние от начала координат до плоскости, где рассчитывается аксептанс; 3156 — апертура начала координат; 3157 — шаг по $x(y)$; 3157 + i — полуапертура i -го элемента, a_i ; 3207 + i — полуапертура i -го элемента, a_i .

Если необходим только расчет аксептанса системы, надо нажать 2-й разряд на КЗУ-IV. Для распечатки многоугольника аксептанса на АЦПУ нажать 1-й разряд КЗУ-IV. Пример распечатки многоугольника совместно со значениями фазовых координат приведен на рис. 2. Для печати эллипсов внутри элементов необходимо вместе с информацией ввести карту «Печать эллипсов».

Программа «Транспорт». Инструкция к пользованию программой приведена в работе [2]. Для проверки расчета после расчета по «Фокусу» можно ввести карту «Вызов транспорт» с информацией согласно инструкции.

В заключение автор выражает благодарность В. В. Миллеру за предоставление программы «Фокус» и помощь в ее освоении, а также Л. З. Джилавяну за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Котов, В. В. Миллер. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий. М., Атомиздат, 1969, § 36.
2. Р. Н. Федорова, А. И. Широкова. Препринт ОИЯИ, 11-3381, 1967.
3. И. Александров, В. Карташев, А. Самойлов. Препринт ИФВЭ, ОП 67-18, 1967.
4. Л. З. Джилавян, В. А. Обозный. Препринт ФИАН, № 130, 1970; наст. сб., стр. 120.

Г. Б. ВЕРБИЦКИЙ, Л. З. ДЖИЛАВЯН, В. Н. ЗАХАРОВ, М. А. ЖАРЕНОВ,
М. В. КАРПОВ, Р. Л. КОНДРАТЬЕВ, В. В. МЕЛЬНИКОВ, В. А. ОБОЗНЫЙ,
В. Н. ПОНОМАРЕВ, Г. Н. СОЛОВЬЕВ, В. Н. ЧАЛЫЙ, Ю. И. ЯЦЕНКО

ЮСТИРОВКА ФОКУСИРУЮЩИХ КАТУШЕК ИНЖЕКТОРНОЙ СЕКЦИИ ЛИНЕЙНОГО УСКОРИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ МЕТОДОМ КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ¹

Для фокусировки электронного пучка в инжекционной секции линейных электронных ускорителей используются толстые соленоидальные линзы [1]. Очень важно обеспечить их соосность с диафрагмированным волноводом инжекционной секции. Это позволит получить наибольший ток из инжекционной секции при наименьших радиальных размерах пучка. Такое улучшение характеристик пучка приведет к следующим результатам.

1. Увеличение выходного тока ускорителя за счет:

а) большего инжекционного тока в случае, если не достигается критического тока, при котором происходит укорочение импульса тока; б) возможного увеличения критического тока [2] из-за лучшей параксильности пучка ускорителя; в) такого увеличения плотности тока из инжектора, при котором возможна коллимация пучка, приводящая к увеличению критического тока.

2. Увеличение стабильности параметров пучка при различных режимах работы инжекционной секции.

3. Увеличение энергии выходного пучка ускорителя благодаря меньшей нагрузке секций частью пучка, который садится на диафрагмах ускорителя.

4. Возможное сужение энергетического спектра за счет прохождения пучка в приосевой более однородной области поля ускорителя.

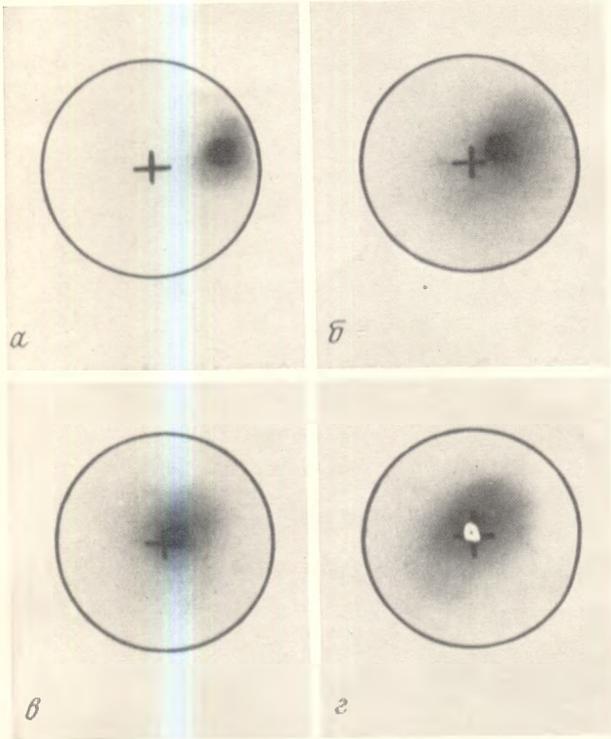
5. Уменьшение фона от ускорителя и систем транспортировки пучка, а также уменьшение энергии фоновых γ -квантов до энергии на выходе из инжекционной секции 3—3,5 Мэв, что ниже порогов фотоядерных реакций.

6. Увеличение выхода вторичных частиц, например позитронов.

Существующие методы юстировки фокусирующих катушек сводились в основном к методу поочередного изменения переменных, задающих положение катушек. При этом результаты юстировки оценивались либо по выходному току из инжекционной секции, положению и размерам пятна [3], либо по измерению радиальной составляющей магнитного поля внутри инжекционной секции [4]. Такая процедура является весьма трудоемкой и не всегда приводит к нужным результатам [3].

В данной работе для решения этой задачи предлагается использовать метод крутого восхождения [5]. Основная идея метода заключается в том, что вначале ставится серия опытов для локального описания небольшого

¹ Работа выполнена совместно с кафедрой электронных вычислительных машин МИФИ.



Результаты пошагового изменения переменных
a — начальное положение пучка; *б-г* — положение пучка
после 1, 2 и 3-го шагов соответственно

участка поверхности отклика полиномом первой степени $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_kx_k$, где b_i — коэффициенты регрессии, x_i — независимые переменные.

Далее производится движение по поверхности отклика в направлении градиента линейного приближения.

Известно, что градиент функции отклика задается выражением

$$\text{grad } y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \mathbf{x}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \mathbf{x}_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_k} \mathbf{x}_k,$$

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ — единичные векторы-орты в направлении координатных осей. Предполагается, что функция y непрерывна, однозначна и не имеет особых точек. Из векторного анализа известно, что движение в направлении градиента — это движение по кратчайшему, наиболее крутому пути. Если поверхность отклика локально может быть описана линейным уравнением, то частные производные будут равны коэффициентам регрессии. В этом случае для движения по поверхности отклика в направлении крутого восхождения нужно будет независимые переменные изменить пропорционально величине соответствующих коэффициентов регрессии с учетом их знака. При постановке эксперимента всегда приходится переходить к натуральным переменным. В натуральных переменных величина шага должна быть пропорциональна произведению b_i на единицу варьирования.

Решение поставленной задачи юстировки фокусирующих катушек инжекторной секции проводилось для каждой катушки в отдельности. Линейная модель положения пучка для каждой катушки может быть представлена в виде $r^2=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4$, где r^2 — квадрат расстояния от центра диафрагмы до центра пучка, x_1, x_2 — вертикальные перемещения концов катушки, x_3, x_4 — горизонтальные перемещения.

Для получения такой математической модели был использован дробный факторный эксперимент типа 2^{4-1} . Матрица планирования модели положения пучка для одной из катушек приведена в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	r^2 , мм ²	Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	r^2 , мм ²
1	—	—	—	—	110,4	5	—	—	+	+	151,3
2	+	—	—	+	169,0	6	+	—	+	—	169,0
3	—	+	—	+	86,6	7	—	+	+	—	81,0
4	+	+	—	—	121,0	8	+	+	+	+	136,6

При этом использовались следующие уровни изменения переменных: основной уровень равен 0; верхний уровень равен +1; нижний уровень равен -1. Интервал варьирования равен 1. Результаты эксперимента фотографировались на фотобумаге, и по фотографиям определялись значения r^2 .

В результате проведения эксперимента по матрице планирования и расчета коэффициентов уравнения регрессии была получена следующая модель положения пучка: $r^2=128+20,8x_1-21,5x_2+6,35x_3+7,8x_4$.

На основании полученной модели были рассчитаны шаги для каждой переменной: $\Delta x_1=21,2$; $\Delta x_2=22,0$; $\Delta x_3=7,2$; $\Delta x_4=8,6$, а также определены направления их изменения. Результаты расчета и экспериментальные данные сведены в табл. 2, где значения переменных даны в единицах перемещения.

Т а б л и ц а 2

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	r^2 , мм ²
1	0	0	0	0	110,4
2	-21,2	+22,0	-7,1	-8,6	20,0
3	-10,6	+11,0	-3,55	-4,2	1,0
4	- 2,1	+ 2,2	-0,71	-0,86	0,0

Движение в направлении, обратном градиенту функции отклика r^2 , производилось с переменным шагом, что позволило точнее произвести юстировку катушки. При этом был получен максимальный ток пучка на выходе инжекторной секции. На рисунке представлено пошаговое изменение переменных.

Аналогичная работа была проделана с остальными катушками.

В результате использования метода экстремального планирования эксперимента для юстировки фокусирующих катушек инжекторной секции было достигнуто совпадение центров пучка и выходной диафрагмы с точностью измерений. При этом процедура юстировки одной катушки занимала время порядка двух часов.

В дальнейшем метод крутого восхождения предполагается использовать для юстировки магнитов и линз системы формирования пучков на линейном ускорителе лаборатории фотоядерных реакций ФИАН.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, А. Э. Паргаманик. Теория и расчет линейных ускорителей. М., Атомиздат, 1962, стр. 38.
2. Г. В. Воскресенский, Ю. П. Серебряков. Ускорители, вып. X. М., Атомиздат, 1968, стр. 130.
3. О. А. Вальднер, А. А. Глазков, Е. Г. Пятнов, В. Д. Селезнев. Ускорители, вып. V. М., Атомиздат, 1963, стр. 96.
4. Г. К. Демьяненко. Канд. дисс., ФТИ АН УССР. Харьков, 1968.
5. В. В. Налимов, Н. А. Чернов. Статистические методы планирования экспериментов. М., «Наука», 1965.

В. А. ЗАПЕВАЛОВ, В. Н. ПОНОМАРЕВ,
И. Н. РЕЙНГАРТ-НИКУЛИН

СИСТЕМА ТОЧНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ЗАРЯДА ИМПУЛЬСНОГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ

Планируемые в лаборатории фотоядерных реакций ФИАН эксперименты по получению γ -квантов, упругому и неупругому рассеянию электронов на ядрах требуют высокой точности измерения заряда пучка электронов. Это вызвало необходимость создания системы измерения заряда, обеспечивающей точность измерения 0,5% и лучше.

Из проведенного анализа опыта работы многих лабораторий по применению магнитоиндукционных мониторов для измерения интенсивности пучков заряженных частиц, а также из сравнения двух режимов работы тороидальных мониторов (режима повторения формы импульса тока пучка и режима контура ударного возбуждения) с точки зрения возможности получения высокой точности измерения заряда пучка электронов следует вывод: высокую точность измерения заряда можно обеспечить [1]:

- а) работой магнитоиндукционного монитора в режиме резонансного контура;
- б) выбором момента измерения исследуемого сигнала для осуществления полного разделения по времени полезного сигнала от монитора и внешних электромагнитных помех;
- в) точностью и стабильностью определения оптимального момента измерения;
- г) точностью измерения величины исследуемого сигнала.

В лаборатории фотоядерных реакций ФИАН разработана система измерения заряда на основе применения прозрачного тороидального монитора,

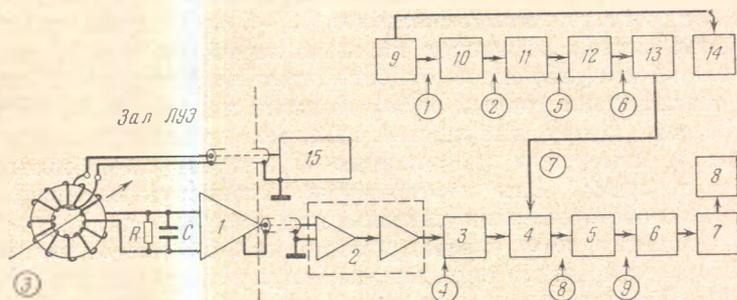


Рис. 1. Блок-схема системы измерения заряда

Линейный канал системы: 1 — предусилитель; 2 — главный усилитель; 3 — формирователь; 4 — линейные ворота; 5 — преобразователь амплитуда—время; 6 — устройство перенесения заряда; 7 — интегратор тока; 8 — счетчик. Блок управления: 9 — блок синхронизации линейного ускорителя; 10 — линия задержки; 11—13 — блок точной задержки с устройством выработки импульса; 14 — счетчик числа импульсов пучка; 15 — схема калибровки. Цифры в кружках — соответствующие импульсы на диаграмме работы

работающего в режиме резонансного контура. Выбор параметров монитора проводился с учетом возможности выбора оптимального момента измерения для обеспечения расчетной точности измерений заряда лучше 0,1%. Система позволяет получить хорошую точность измерения заряда за счет обеспечения необходимой точности и стабильности определения оптимального момента измерения и точности измерения величины исследуемого сигнала с датчика.

Блок-схема системы приведена на рис. 1. Система состоит из двух каналов: канала линейного преобразования сигнала и канала управления. В первый канал входят: магнитоиндукционный монитор, предварительный усилитель, главный усилитель, формирователь и линейные ворота, преобразователь амплитуда—время, устройство занесения заряда, интегратор и блок цифроаналоговой интерполяции. Канал управления включает в себя некоторые элементы системы синхронизации линейного ускорителя, блок точной задержки с устройством выработки импульса-строба и счетчика числа импульсов тока пучка ускорителя. Для проведения калибровки тороидального монитора предусматривается устройство калибровки.

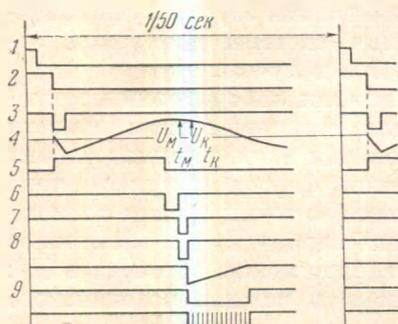


Рис. 2. Диаграмма работы системы

1 — импульс синхронизации 1/50 сек; 2 — импульс линии задержки; 3 — импульс тока пучка; 4 — исследуемый сигнал на выходе главного усилителя; 5 — основной импульс точной задержки; 6 — промежуточный импульс точной задержки; 7 — импульс-строб; 8 — импульс на выходе линейных ворот; 9 — импульс преобразователя амплитуда—время

Работа системы поясняется диаграммой, показанной на рис. 2. Импульсный пучок электронов, проходящий через монитор, возбуждает резонансный контур. Период колебаний контура 200 мксек, время затухания колебаний 1 мсек. Синусоидальный сигнал с обмотки монитора предварительно усиливается и по коаксиальному экранированному кабелю подается на вход главного усилителя. При заданном уровне интенсивности пучка электронов коэффициент усиления главного усилителя выбирается таким, чтобы амплитуда синусоидального сигнала в момент измерения на выходе главного усилителя составляла 3—5 в. После соответствующего формирования сигнал поступает на вход линейных ворот, на которые приходит также импульс-строб от блока точной задержки. Блок точной задержки обеспечивает точный выбор момента измерения t_k исследуемого сигнала. Задний фронт импульса-строга по времени точно совпадает с моментом t_k измерения напряжения U_k , пропорционального заряду импульса тока пучка. Для компенсации неточности измерения заряда за счет возможного изменения длительности импульса тока пучка момент измерения t_k сдвинут по времени примерно на 1,5 мксек относительно момента t_m , соответствующего первому максимуму синусоидального сигнала монитора [1]. Выходной импульс линейных ворот с амплитудой, равной U_k , преобразуется во временной интервал в преобразователе амплитуда—время. Заряд выходного импульса преобразователя стандартной амплитуды, длительность которого строго пропорциональна величине напряжения U_k , через устройство занесения заряда передается на интегратор. Заряд, измеряемый интегратором тока [2], будет строго пропорционален заряду определенного числа импульсов тока пучка, проходящего через

монитор. В результате можно определить полный заряд пучка электронов и средний заряд одного импульса тока пучка.

Ниже приводятся характеристики основных элементов системы по данным предварительных измерений.

1. Предусилитель. Коэффициент усиления 200.
2. Главный усилитель состоит из двух каскадов, общий коэффициент усиления 1000. Нелинейность коэффициента усиления при изменении амплитуды выходного сигнала от 5 до 6 в составляет 0,2%. Для рабочей области от 1 до 5 в нелинейность меньше 0,2%.
3. Линейность преобразователя амплитуда—время для входных сигналов от 1 до 6 в лучше 0,2%. Максимальное время преобразования 150 мксек.
4. Блок точной задержки. Длительность основного импульса задержки можно менять от 20 до 300 мксек. Амплитуда выходного импульса-строба до 7 в, длительность его может перестраиваться в пределах от 1,5 до 3 мксек. Температурная стабильность работы блока лучше 0,2% на 10° С.
5. Устройство переноса заряда на интегратор. Одно из отличий данной системы от систем измерения интенсивности пучка частиц подобного типа [3] состоит в применении прецизионного устройства перенесения заряда на интегратор. Электронное устройство перенесения заряда является практически безынерционным в отличие от известных релейных систем передачи заряда на измерительную схему [4]. Применяемое устройство обладает высоким выходным импедансом в закрытом состоянии, что является необходимым условием при работе с интегратором типа Миллера. В данном устройстве предусмотрены необходимые меры по устранению токов утечки, которые могут приводить к неточности измерения заряда. Калибровочные измерения показали, что ошибка в измерении заряда за счет паразитных токов утечки устройства перенесения заряда при оптимальной работе интегратора тока [2] меньше 0,02%.

С помощью этой системы проведены калибровочные измерения, измерены точности и нестабильности работы отдельных элементов системы. Система используется в физических экспериментах на пучках электронов линейного ускорителя.

В заключение авторы считают приятным долгом выразить благодарность Л. Е. Лазаревой за интерес к работе, Л. И. Накладовой, принимавшей участие в изготовлении измерительной аппаратуры, и Р. Л. Кондратьеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. S. Larsen, D. Horelick. Proc. Sympos. on Beam Intensity Measurement. Daresbury, 1968, p. 260.
2. G. M. Gurevitch, B. N. Ponomarev, G. V. Solodukhov. Proc. Sympos. on Beam Intensity Measurement, Daresbury, 1968, p. 238.
3. М. А. Воеводин, Ш. З. Сайфуллин. Препринт ОИЯИ, № 9—4834, 1969.
4. B. Grossetete, D. B. Isabelle. Proc. Sympos. on Beam Intensity Measurement. Daresbury, 1968, p. 3.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>А. Б. Курепин.</i> Упругое и неупругое рассеяние протонов тяжелыми ядрами	3
<i>В. И. Беляк.</i> Некоторое обобщение формулы суммирования Абеля—Плана и применение его для описания резонансного рассеяния	31
<i>Г. Е. Беловицкий, Л. Н. Колесникова, О. С. Пресняк, Л. В. Сухов.</i> Развитие методики измерений дифференциальных сечений рассеяния быстрых нейтронов	45
<i>М. В. Казарновский, Е. М. Мороз.</i> Взаимодействие ионов при ускорении в циклотроне	49
<i>Ю. К. Хохлов.</i> Некоторые вопросы динамики частиц в изохронном секторном циклотроне	74
<i>В. С. Воронин, А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев.</i> Авторезонанс электромагнитной волны и заряженной частицы в магнитном поле	95
<i>В. В. Мельников, В. Н. Тележников.</i> Тиратронный разрядник модулятора квантронна линейного ускорителя электронов ЛУ-50	112
<i>В. Н. Пономарев.</i> Измерение эффективности мониторов вторичной эмиссии	116
<i>Л. З. Джилаван, В. А. Обозный.</i> Некоторые варианты ахроматических поворотных-анализирующих систем	120
<i>Л. З. Джилаван, В. А. Обозный.</i> Варианты разводки пучков от линейного ускорителя электронов ФИАН	125
<i>В. А. Обозный.</i> Библиотека программ для расчета электронно-оптических систем	129
<i>Г. Б. Вербицкий, Л. З. Джилаван, В. Н. Захаров, М. А. Жаренов, М. В. Карпов, Р. Л. Кондратьев, В. В. Мельников, В. А. Обозный, В. Н. Пономарев, Г. Н. Соловьев, В. Н. Чалый, Ю. И. Яценко.</i> Юстировка фокусирующих катушек инжекционной секции линейного ускорителя электронов методом круглого восхождения	132
<i>В. А. Запесалов, В. Н. Пономарев, П. И. Рейнгардт-Никулин.</i> Система точного измерения заряда импульсного пучка электронов	135

Ядерные реакции и ускорители заряженных частиц

Труды ордена Ленина Физического института

Том 69

Утверждено к печати

ордена Ленина Физическим институтом им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР

Редактор *В. Ф. Тушицкая.* Редактор издательства *Л. В. Кудрявцева*

Художественный редактор *Н. Н. Власик.* Технические редакторы *А. М. Сатарова, В. И. Зудина*

Сдано в набор 13/III 1973 г. Подписано к печати 18/VII 1973 г.

Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Усл. печ. л. 12,42. Уч.-изд. л. 11,1.

Тираж 1200. Тип зак. 164. Бумага № 1. Т-12405. Цена 78 коп.

Издательство «Наука», 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

1-я типография издательства «Наука», 199034, Ленинград, 9 линия, дом 12